广西科学 Guangxi Sciences 1 (1): 7～9 1994

含有一类幂零子群的有限群*

Finite Groups with a Class of Nilpotent Subgroups

李世荣
Li Shirong

(广西大学，南宁市西乡塘路，530004)
(Guangxi University, Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 令 G 是一个有限群，P 是一个固定奇素数. $M<G$ 表示 M 是 G 的真子群. 记 $J_2(G)=\{M:M<G,|G:M|$ 非素数幂，且 $|G:M|_p=1\}$. 本文讨论当 $J_2(G)$ 的元皆为幂零群时 G 的结构.

关键词 有限群 幂零群 构造

Abstract Let G be a finite group and let p be an odd prime. We denote by $M<G$ that M is a proper subgroup of G. Put $J_2(G)=\{M: M<G, |G:M|$ is not a prime power and $|G:M|_p=1\}$. *In this paper we investigate the structure of G if every element of $J_2(G)$ is nilpotent.*

Key words finite group, nilpotent group, structure

在有限群的构造理论中，幂零子群对原群的影响被广泛地研究. 令 G 是一个有限群，P 是一个固定的素数，$M<G$ 表示 M 是 G 的真子群. 记

$J_1(G)=\{M: M<G, |G:M|$ 非素数，且 $|G:M|_p=1\}$.

文献〔1〕假设 $J_1(G)$ 的元皆为幂零群，研究了 G 的构造. 本文考虑 $J_1(G)$ 的一个子集

$J_2(G)=\{M: M<G, |G:M|$ 非素数幂，且 $|G:M|_p=1\}$.

我们问：假若 $J_2(G)$ 的元皆为幂零群，G 的结构如何？回答这一问题须分两种情况讨论：$p=2$ 及 $p>2$. 本文只讨论 $p>2$ 的情形. 对于 $p=2$，问题比较复杂，须另作专门的研究.

我们的主要结果如下

定理 1 设 G 是一个有限群，p 是一个固定奇素数. 假设 $J_1(G)$ 的元皆为幂零解，那么或者 G 是可解的，或者 $p=7$，$|\pi(G)|=3$，并且 $G/S(G)\cong PSL(2,7)$，这里 $S(G)$ 表示 G 的最大可解正规子群，$S(G)$ 可表为一个 $p-$ 群与一个交换 $2-$ 群 A 的直积，并且 A 落在 G 的中心内.

定理 1 的证明需要下面的结果，它依赖有限单群的分类：

定理 A[2] 设 G 是一个有限非交换单群，G 的阶仅含三个不同的素因子. 那么 G 为下列八个群之一：$A_5, A_6, PSL(2,7), PSL(2,8), PSL(2,17), PSL(3,3), PSU(3,3)$ 以及 $PSU(4,2)$.

本文使用的符号用术语是标准的. 另外，我们规定 $\pi(G)$ 表示群 G 的阶元素因子集，$\mathbf{Z}_n$ 表示 n 阶循环群；$H\rtimes K$ 表示子群 H 由 K 的半直积.

1 两个引理

为了使定理 1 的证明简明清晰，我们先给出两个引理，其中引理 1 是定理 1 的特殊情形，它是已知的；引理 2 不仅对定理 1 的证明是需要的，而且还具有独立意义.

引理 1[5] 设 G 是一个有限群，$J_2(G)$ 的元皆为幂零群. 若 $p\nmid|G|$，则 G 为可解群.

引理 2 设直积群 $H=PSL(2,7)\times\cdots\times PSL(2,7)$. 则半直积 $H\rtimes\mathbf{Z}_7\cong H\times\mathbf{Z}_7$.

证 对 H 的直因子个数 m 用归纳法. 首先证明：

(i) 若 $\mathbf{Z}_7$ 正规化 H 的某个直因子 $PSL(2,7)$，那么引理成立.

记 $G=H\rtimes\mathbf{Z}_7$，$G_1=PSL(2,7)\rtimes\mathbf{Z}_7$. 因为 $PSL(2,7)$ 无 7 阶外自同构，我们有 $C_{G_1}(PSL(2,7))$

1993-09-25 收稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

$= \mathbf{Z}_7$. 于是 $C_G(PSL(2,7)) = (\overbrace{PSL(2,7) \times \cdots \times PSL(2,7)}^{m-1}) \times \mathbf{Z}_7$, 并且 $G = PSL(2,7) \times C_G(PSL(2,7))$. 由归纳,引理对 $C_G(PSL(2,7))$ 成立,从而引理对 G 成立. 这样便证明了 (i).

因此,为了证明本引理,我们只需证明

(ii) $\mathbf{Z}_7$ 至少正规化 H 的一个直因子 $PSL(2,7)$.

假设(*ii*)不成立,我们来推导出一个矛盾. 固定 H 的一个直因子 $H_1 = PSL(2,7)$. 记

$$H_2 = < H_1^{\mathbf{Z}_7} > = \overbrace{PSL(2,7) \times \cdots \times PSL(2,7)}^{m_1 个},$$

$$G_2 = H_2 \rtimes \mathbf{Z}_7,$$

那么 $1 < m_1 \leqslant 7$. 令 R 为 H_2 的 Sylow 3-子群. 则

$$N_{G_2}(R) = (\overbrace{S_3 \times \cdots \times S_3}^{m_1 个}) \rtimes \mathbf{Z}_7$$

其中 S_3 为三个文字上的对称群. 我们可以取 T、R、Z_7 为 $N_{G_2}(R)$ 的一组 Sylow 基,这里

$T = < u_1 > \times \cdots \times < u_{m_1} >$

$R = < v_1 > \times \cdots \times < v_{m_1} >$

其中诸 u_i 是对合,诸 v_i 是 3 阶元. 由于 $m_1 > 1$, $\mathbf{Z}_7$ 正规化 T 和 R 但不中心化它们中的任何一个.

若 $m_1 \leqslant 5$,则 $7 \nmid 2^i - 1 \quad \forall i \leqslant m_1$. 因此 $2^{m_1} \cdot 7$ 阶群 $T\mathbf{Z}_7$ 为幂零,特别 $\mathbf{Z}_7$ 中心化 T,这是一个矛盾.

若 $m_1 = 6$,类似刚才的讨论,$\mathbf{Z}_7$ 在 T、R 上的作用是无不动点的,因而在 TR 上的作用也是无不动点的,由文献[4],子群 TR 为幂零,这显然不可能.

最后讨论 $m_1 = 7$. 在这种情况,$\mathbf{Z}_7$ 在 $\{u_1, \cdots, u_7\}$ 上的共轭作用是传递的. 类似上一段的讨论,还有 $C_T(\mathbf{Z}_7)$ 是一个 2 阶群. 由 Maschke 定理[4],$T = T_1 \times C_T(\mathbf{Z}_7)$, $T_1 = [T, \mathbf{Z}_7]$ 是 $\mathbf{Z}_7$ 不变的. 由于 $T = < u_1 > \times \cdots \times < u_7 >$ 是 2^7 阶初等交换群,2^6 阶子群 T_1 必定由 $u_1, \cdots, u_7$ 中 6 个元生成,不妨就设 $T_1 = < u_1 > \times \cdots \times < u_6 >$. T_1 为 $\mathbf{Z}_7$—不变与前面说 $\mathbf{Z}_7$ 在 $\{u_1, \cdots, u_7\}$ 上传递是一个矛盾. 这说明 $m_1 = 7$ 同样不可能. 于是引理 2 证完.

2 定理 1 的证明

假设有限群 G 满足定理的条件,并且 G 是非可解的. 首先,显然有

(1) G 的商群和包含 P 的子群满足定理的假设,这里 P 是 G 的一个 Sylow p-子群.

其次,我们证明

(2) $|\pi(G)| = 3$.

令 $N = N_G(P)$. 若 $N = G$,即 $P \lhd G$,那么商群 G/P 满足引理 1 的假设,故 G/P 可解,于是 G 可解,这是一个矛盾. 因此我们有 $N < G$.

若 N 不是 p-幂零的,那么存在一个素数 $q \in \pi(N)$, $q \neq p$ 及 N 的一个 Sylow q-子群 Q 使得子群 PQ 非幂零. 由定理假设,$|G : PQ|$ = 素数幂,这表明 (2) 已成立.

假设 N 为 p-幂零. 因为 $N < G$,我们可以选取 G 的一个子群 M,使得 M 真含 N,并且 N 在 M 中极大. 我们证明 M 是可解的.

考察 Sylow p-子群 P 的 Thompson 子群 $J(P)$,它是 P 的特征子群. 我们有

$N \leqslant N_M(Z(\mathbf{J}.(P))) \leqslant M$

若 $Z(J(P))$ 正规于 M,记 $\overline{M} = M/Z(J(P))$, $\overline{P} = P/Z(J(P))$. 显然有 $N/Z(J(P)) \leqslant N_{\overline{M}}(\overline{P})$. 若 $\overline{P}$ 在 $\overline{M}$ 中正规,则对 $\overline{M}$ 而言,引理 1 的条件被满足,故 $\overline{M}$ 可解,从而 M 可解. 于是可设 $\overline{P}$ 在 $\overline{M}$ 中非正规. 在这种情况,由于 $N/Z(J(P))$ 在 $\overline{M}$ 中极大,由前式得 $N_{\overline{M}}(\overline{P}) = N/Z(J(P))$,从而由 N 的 p-幂零性推出 $N_{\overline{M}}(\overline{P})$ 为 p-幂零. 由归纳得 $\overline{M}$ 可解,从而 M 可解. 现在设 $Z(J(P))$ 在 M 中非正规. 在这种情况,由于 N 是 M 的极大子群,我们有 $N_M(Z(J(P))) = N$,因而是 p-幂零群. 由 Glauberman-Thompson 关于正规 p-补定理[4],M 是 p-幂零的. 令 C 是 M 的正规 p-补,则有半直积群

$M = P \rtimes C$, P'-子群 $C \lhd M$

如果 $|\pi(C)| \geqslant 3$. 由于 M 真含 N,故 P 在 M 中非正规,于是 C 有一个 P-不变 Sylow 子群 Q 使得子群 PQ 非幂零,而 $|M : PQ|$ 至少含两个不同的素因子,矛盾于定理的假设. 于是必有 $|\pi(C)| \leqslant 2$. 由 Burnside $p^a q^b$-定理,C 是可解的,于是 M 为可解.

因为可解群具有 Sylow 基,令 $P = P_1, P_2, \cdots, P_s$ 是 M 的一组 Sylow 基,那么对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$ PP_i 是 M 的子群. 又因为 P 在 M 中非正规,所以至少有一个 i 满足子群 PP_i 非幂零. 由定理假设,子群 PP_i 在 G 中的指数为素数幂. 这完成了(2)的证明.

令 $G_2 = S(G)$, G 的最大可解正规子群,G_1/G_2 为 G/G_2 的极小正规子群. 我们来证明

(3) $G_1/G_2 \cong PSL(2,7) \times \cdots \times PSL(2,7)$,且 $p = 7$.

因为定理的假设是商群继承的,为了确定 G_2/G_3,我们可以假设 $G_2 = 1$. 于是 G_2 是一个特征单群,即

$G_2 = L_1 \times \cdots \times L_m$,

这里 L_i 是互相同构的非交换单群. 因为在(2)中我们已经证明 G 的阶仅含三个不同的素因子,所以 L_i

只能是定理 A 中列出的八个群之一. 我们证明 $L_i \cong PSL(2,7)$，且 $p=7$.

令 P_i 表示 L_i 的 Sylow $p-$ 子群，那么 $P_1\times\cdots\times P_i$ 是 G_2 的一个 Sylow $p-$ 子群，记为 S. 我们可以假设 $S\leqslant P$. 由 Frattini 推理，$G=N_G(S)G_1$，故 $N_G(S)$ 包含 G 的一个 Sylow $p-$ 子群，比如 P. 由定理假设，$N_G(S)$ 或为幂零，或者 $|G:N_G(S)|$ 是一个素数幂. 进一步，显然有 $N_{G_1}(S)=N_{L_1}(P_1)\times\cdots\times N_{L_m}(P_m)$，$N_{L_i}(P_i)$ 互为同构. 于是，我们推出

(＊) $N_{L_i}(P_i)$ 幂零，或 $|L_i:N_{L_i}(P_i)|=$ 素数幂.

定理 A 中的八个群的子群构造是完全清楚了的，从文献〔6〕中我们可以查到，它们的奇阶 Sylow 子群的正规化子都是非幂零群，而且除 $PSL(2,7)$ 以外，其指数均非素数幂. 即是说，八个群中满足条件(＊)的唯一可能是 $PSL(2,7)$. 而 $PSL(2,7)$ 的阶为 $2^3\cdot3\cdot7$，它的 Sylow $3-$ 子群的正规化子是 6 阶非幂零群，其指数是 $2^2\cdot7$，所以 $p=3$ 也不合要求. $PSL(2,7)$ 的 *Sylow* $7-$ 子群的正规化子是阶 21 的非幂零群，它的指数是 2^3. 即 $p=7$ 时，满足条件(＊). 这证明了(3).

(4) $G/G_2\cong PSL(2,7)$

为了证明(4)，只需证明 2、3、7 都不能整除 $|G:G_1|$. 为此，我们仍可假设 $G_2=1$，所以有 $G_1=PSL(2,7)\times\cdots\times PSL(2,7)$.

假设 $7\,|\,|G:G_1|$. 那么存在包含 G_1 的子群 M 使得 $|M:G_1|=7$. 进一步还可推出 $M=G_1\rtimes \mathbf{Z}_7$. 由引理 2 得 $M=G_1\times \mathbf{Z}_7$. 故 $1\neq C_G(G_1)\lhd G$. 易证 $C_G(G_1)$ 为可解，这与假设 $G_2=S(G)=1$ 矛盾. 于是 $7\nmid|G:G_1|$.

假设 $3\,|\,|G:G_1|$. 令 S 为 G_1 的一个 Sylow $7-$ 子群. 由 Frattini 推理，$G=N_G(S)G_1$ 故 $G/G_1\cong N_G(S)/N_{G_1}(S)$，从而 $3\,|\,|N_G(S):N_{G_1}(S)|$，并且 $N_G(S)$ 包含 G 的一个 Sylow $7-$ 子群，比如 P. 根据 $PSL(2,7)$ 的构造，$N_{G_1}(S)$ 是 G_1 的 $\{3,7\}-$ Hall 子群，且非幂零. 于是子群 $PN_{G_1}(S)$ 非幂零，但指数 $|G:PN_{G_1}(S)|$ 被 2 和 3 整除，矛盾于定理的假设. 这证明了 $3\nmid|G:G_1|$.

假设 $2\,|\,|G:G_1|$. 那么 $2\,|\,|N_G(S)|$，且 $N_G(S)$ 包含 G 的一个 Sylow $7-$ 子群 P. 于是可解群 $N_G(S)$ 有 $\{2,7\}$ Hall 子群 PT_0，其中 T_0 是 $2-$ 群. 又因为根据 $PSL(2,7)$ 的构造，$G_1\cap N_G(S)$ 是 $\{3,7\}-$ 群，故子群 PT_0 在 G 中的指数被 2 和 3 整除，从而由定理假设，子群 PT_0 为幂零，这说明 T_0 中心化 P，当然也就中心化 S. 进一步推出 T_0 正规化 G_1 的每个直因子 $PSL(2,7)$. 即我们有子群 $H=PSL(2,7)\times T_0$. 再令 T 为 H 的 Sylow $2-$ 子群，使得 $T_0\leqslant T$. 那么 $T_1=T\cap H$ 是 $PSL(2,7)$ 的 Sylow $2-$ 子群，且 $T_1\lhd T$，推出 $T_1\cap Z(T)\neq1$，于是 T_0 中心化 $PSL(2,7)$ 的一个 Sylow $7-$ 子群和一个 $2-$ 子群，从而 T_0 中心化整个 $PSL(2,7)$. 综上所述，我们证明了 T_0 中心化 G_1 的每个直因子 $PSL(2,7)$，故知 T_0 中心化整个 G_1. 于是 $T_0\leqslant C_G(G_1)\leqslant S(G)$. 因为我们已假设 $S(G)=1$，而 $T_0\neq1$. 这样便产生了一个矛盾. (4) 证毕.

(5) 最后，我们讨论 $G_2=S(G)$ 的结构. 仍用 P 表示 G 的 Sylow $7-$ 子群. 显然地，子群 $PS(G)$ 在 G 中的指数不是素数幂，故由定理假设 $PS(G)$ 为幂零，特别地 $S(G)$ 为幂零. 令 A 为 $S(G)$ 的正规 $p-$ 补子群，那么 $A\lhd G$. 因此，$P\leqslant C_G(A)\lhd G$，故又知商群 $G/C_G(A)$ 的阶至多含二个不同的素因子，即 2 和 3，当然 $G/C_G(A)$ 可解. 再由(4)推出 $G=C_G(A)$，故得 $A\leqslant Z(G)$. 假设 $3\,|\,|A|$. 令 R_1 为 A 的 Sylow $3-$ 子群，R 为 G 的 Sylow $3-$ 子群，那么 $R_1<R$. 由(4)还可看到 $|R:R_1|=3$. 如果 R 有一个 3 阶元 a 使得 $a\notin R_1$，那么 $<a>$ 是 R_1 在 R 中的补子群，由文献〔3〕，R_1 在 G 中有一个补子群，记作 G_0，像前面的证明一样，我们看到 G_0 的 Sylow 7- 子群的正规化子是非幂零群，而在 G_0 中的指数为 2 的方幂，于是它在 G 中的指数同时被 2 和 3 整除，矛盾于定理的假设. 这矛盾表明 R 的 3 阶元皆落在 R_1 中，也就是说 G 的每个 3 阶元皆在 G 的中心内. 于是由 *Ito* 引理[3]，G 有正规 $3-$ 补，特别地，G 为可解，这又是一个矛盾. 这样，我们证明了 A 是一个 2- 群. $S(G)$ 的构造如定理所述.

定理 1 证毕.

由定理 1 得如下的推论：

推论 1 设 p 为奇素数，P 是有限群 G 的一个 Sylow $p-$ 子群. 如果 G 的每个包含 P 的非幂零子群在 G 中的指数为素数或素数的平方，那么 G 是可解的.

推论 2 设 G 为非交换单群，那么 $G\cong PSL(2,7)$ 当且仅当存在一个奇素数 $p\in\pi(G)$，及 G 的一个 Sylow $p-$ 子群 P 满足每个包含 P 的非幂零子群在 G 中的指数为素数幂.

推论 2 给出了 $PSL(2,7)$ 的一个特征性盾.

(下转第 12 页 Continue on page 12)

$\lim \| x_n - q \| = 0$ ⑨

现在我们来证明方程 $x + T_x = f$ 只有唯一解. 设 q' 是方程的又一解,从而也是 S 的又一个不动点. 从 $x_0 = q'$ 出发,按程序③给出的每个 x_n 必然都等于 q',从而 $\{x_n\}$ 有界. 由(9)式有 $q' = q$.

(3) 设条件 (a)、(b)、(c) 都得到满足,因为 $\delta_{E^*}(\varepsilon) \geqslant M\varepsilon^s$,根据命题 3(文献〔4〕, p. 337),存在常数 $c > 0$ 以及正整数 N,使得 $b(\lambda_n) \leqslant c\lambda_n^{s-1}, \forall\ n \geqslant N$. 当然我们还可以要求当 $n \geqslant N$ 时,④式成立. 于是利用⑥式推出

$$\| x_{n+1} - q \|^2 \leqslant (1 - \lambda_n) \| x_n - q \|^2 + Mc\lambda_n^s,$$

$\forall\ n \geqslant N$ ⑩

取 $M' = \{\frac{2MC}{1-a}, \lambda_0^{1-s}) \| x_1 + q \|^2, \lambda_1^{1-s}) \| x_2 + q \|^2, \cdots, \lambda_{N-1}^{1-s}) \| x_N + q \|^2\}$. 往证

$$\| x_n - q \|^2 \leqslant M' \lambda_{n-1}^{s-1} s, \forall\ n \geqslant 1$$ ⑪

事实上,由 M' 的定义立即可知⑪对 $1 \leqslant n \leqslant N$ 成立. 设⑪式对 $n \leqslant k (k > N)$ 为真,那么,利用⑩与④,我们得到

$$\| x_{k+1} - q \|^2 \leqslant (1 - \lambda_k) M' \lambda_{k-1}^{s-1} + MC\lambda_k^s \leqslant M' \lambda_k^{s-1} [(1 - \lambda_k) \lambda_{k-1}^{s-1} \lambda_k^{1-s} + \frac{1-a}{2} \lambda_k] \leqslant M' \lambda_k^{s-1} [(1 - \lambda_k)(1 + a\lambda_k) + \frac{1-a}{2} \lambda_k] \leqslant M' \lambda_k^{s-1}$$

由归纳法假设,⑪对一切 $n \geqslant 1$ 成立.

④ 现在设 $E = Lp(\mu), 1 < p < \infty$,则 $\delta_{E^*}(\varepsilon) \geqslant \beta\varepsilon^r$,其中 $r = s(s-1)^{-1}$(引理,文献〔1〕, p. 27). 又设 (a)、(b)、(c) 成立,所以有收敛速度估式⑤,利用⑤以及下述命题即知 $\{x_n\}$ 的 $c-$ 平均序列几乎处处收敛于 q.

命题 设 $f, f_n \in L_p(\mu), 1 < p < \infty, n = 1, 2, \cdots$. 如果存在一个常数 $r \in [1, \infty)$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f - f_n \|^r < \infty$$

则 $\{f_n\}$ 的 $c-$ 平均序列几乎处处收敛于 f.

证 此命题不难直接证明,也可以从文献〔5〕中的引理中简单推出,故略去.

定理 2 的证明 根据定理 1,我们只须证明,对于这种情形,从任一点 $x_0 \in E$ 出发,按照③给出的序列 $\{x_n\}$ 必是有界的. 事实上,由于 S 是非扩张的,对 S 的不动点 q,我们有

$$\| x_{n+1} - q \| = \| (1 - \lambda_n) \| (x_n - q) + \lambda_n (Sx_n - q) \| = \| (1 - \lambda_n)(x_n - q) + \lambda_n (Sx_n - Sq) \| \leqslant \| x_n - q \|, n = 0, 1, 2, \cdots$$

可见 $\{x_n\}$ 有界. 证毕.

参考文献

1 Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone type in Banach spaces. Bull Austral Math Soc, 1990, 42: 21~31.

2 Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations. J Math Soc Japan 1967, 19: 508~520.

3 Matin R H. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces, Proc Amer Soc, 1970, 26: 307~314.

4 Reich S. Constructive techniques for accretive and monotone operators. Applied Nonlinear Analysis, 1979: 335~345.

5 Tao Z G. On pointwise ergodicity of nonlinear operators in Lp—spaces. (to apear).

(上接第 9 页 Continue from page 9)

参考文献

1 Bhattacharya p. Mukherjee N P. A family of maximal subgroups containing the Sylow subgroups and some solvability conditions. Arch Math (Basel) 1985, 45 (5): 390~397.

2 Gorenstein D. Finite simple groups. New York and London: Plenum press, 1982, P. 13.

3 Huppert B. Endliche Gruppen I Berlin- Heidelberg- New York, 1967.

4 Kurzweil H. Endliche Groppen. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

5 Li Shirong. Finite groups with a system of nilpotent subgroups. Southeast Asian Bull. Math 1993, 17 (1).

6 Conway J H. Curtis R T. Norton S P. Wilson R A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press. 1985.