广西科学 Guangxi Sciences 1 (2): 5～6 1994

关于 σ-局部可数基*

On σ-locally Countable Bases

刘 川 宣泽永 谷建胜
Liu Chuan Xuan Zeyong Gu Jiansheng

(广西大学数学与信息科学系
南宁市西乡塘路 10 号，530004)
(Dept. of Math. & Inf's Sci. Guangxi University,
10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

(苏州铁道师范学院
数学系，苏州市横塘，215009)
(Dept. of Math., Suzhou Railway Teacher's
College, Hetang, Suzhou, Jiangsu, 215009)

摘要 证明了下列两个定理：(1) X 有 σ-局部可数基的充分必要条件是 X 是 q-空间且有 σ-局部可数 k-网. (2) 设 $X_n(n\in N)$ 具有 σ-局部 k-网，若 $\prod_{i\in N} X_i$ 为 k-空间，则下列之一成立. ① 每一 X_i 有 σ-局部可数基. ② 除有限多个 X_i 外，$X_i(i\in N)$ 为紧可度量空间.

关键词 基 k-网 q-空间 完全映射 σ-局部可数

Abstract Two main theorems are proved: (1) Topological space X has a σ-locally countable base if X is a q-space with a σ-locally countable k-network; (2) Let X_n $(n\in N)$ have a σ-locally countable k-network. If $\prod_{i\in N} X$ is a k-space, then one of the following holds: ①Each X_i has a σ-locally countable base; ② All but finitely many X_i, $X_i(i\in N)$ are compact metrizable spaces.

Key words base, k-netword, q-space, perfect mappings, σ-locally countable

具有 σ-局部可数基的空间是一类重要的广义度量空间，Fleissner，Reed[1]对这类空间进行了研究，得到一些重要的结论，之后关于这类空间的结果较少，近年来，国内外拓扑学家对 k-网的研究比较活跃，使广义度量空间理论得到了进一步完善，本文应用 σ-局部可数 k-网来研究具有 σ-局部可数基的空间，得到一些有趣的结果.

本文所讨论的空间均为正则 T_1 空间，映射都是连续到上的、未定义的术语，符号均以文献[2]为准.

空间 X 称为 q-空间，若对 $x\in X$，存在可数紧子集 $C\subset X$，使 $x\in C$，且 C 有可数特征.

引理1 可数紧空间 X 若具有 σ-局部可数 k-网，则 X 可度量.

证明 由正则性可设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 为 X 的 σ-局部可数闭 k-网，对 $x\in X$，$n\in N$，存在 X 的邻域 $U_{x,n}$，使 $|\{P\in\mathscr{P}_n: U_{x,n}\cap P\neq\Phi\}|\leqslant\omega$. 记 $\{P\in\mathscr{P}_n: x\overline{\in}P, U_{x,n}\cap P\neq\Phi\}=\{P_{i,n}: i\in N\}$，则 $X\backslash P_{i,n}$ $(i\in N, n\in N)$ 是 x 的开邻域，容易证明 $\bigcap_{i\in N, n\in N}(X-P_{in})\cap(\bigcap_{n\in N}U_{x,n})=\{x\}$，故 X 有点 G_δ 性质，从而 X 是第一可数的. 由文献〔3〕命题3. 6可知有点可数基，因此 X 可度量化（参考文献〔2〕).

定理1 X 有 σ-局部可数基的充分必要条件是 X 是 q-空间且有 σ-局部可数 k-网.

证明 必要性是显然的. 充分性 首先我们证明 X 是第一可数的. 对 $x\in X$. 存在可数紧子集 C，使 $x\in C$ 且 C 有可数特征. 由引理1，C 可度量，则存在 x 的 C 中的可数局部基 $\{V_i: i\in N\}$ 不妨设 $V_i\supset\overline{V}^c_{i+1}$（其中 $\overline{V}^c_{i+1}$表示 $\overline{V}_{i+1}$在 C 中的闭包)，取 W_i 为 X 中开集使 $V_i=W_i\cap C$ 且 $W_i\supset W_{i+1}$设 $\{U_i: i\in N\}$ 为 C 的可数局部基且 $U_i\supset\overline{U}_{i+1}$，容易证明 $\{W_i\cap U_i: i\in N\}$ 为 x 的可数局部基. 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}n$ 为 X 的 σ-局部可数闭 k-网，满足 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 令 $\mathscr{P}'_n=\{\mathscr{F}: \mathscr{F}\subset P_n, |\mathscr{F}|<\omega, \bigcap\mathscr{F}\neq\Phi\}$，$\mu_n(\mathscr{F})=\{A\subset X: A\subset(U\mathscr{F})^\circ, \mathscr{F}\in\mathscr{P}'n$. 若 $\Gamma\subsetneqq\mathscr{F}$，有 $A\not\subset(\bigcup\Gamma)^\circ\}$，$Wn(\mathscr{F})=(\bigcup(\mu_n(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}n)^\circ$，令 $\mathscr{B}n=\{Wn(\mathscr{F}): \mathscr{F}\in\mathscr{P}'n\}$，$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}n$，则有：

①$\mathscr{B}$ 是 X 的基. 首先我们有下面事实（*）对 $x\in U$，U 为 X 的开集，存在 $n\in N$，$\mathscr{F}\in\mathscr{P}'n$，使 $x\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ\subset\bigcup\mathscr{F}\subset U$，且 $x\in\bigcap\mathscr{F}$.（事实（*）的证

1993-09-11收稿。
* 国家自然科学基金资助和广西区教委基金资助项目。

明，对 $x\in U$，U 为 X 的开子集，令 $\mathscr{F}_{x,u}=\{P\in\mathscr{P}: x\in P\subset U\}=\{P_n: n\in N\}$，$\{V_n\}$ 为 x 的可数下降的局部基，若事实（*）不成立，则不存在 $\mathscr{F}_{x,u}$ 中的有限子族 $\mathscr{F}'$，使 $x\in(\bigcup\mathscr{F}')^{\circ}$，从而有 $Vn\setminus(\bigcup_{i=1}^{n}P_i)\neq\Phi$. 取 $x_n\in Vn\setminus(\bigcup_{i=1}^{n}P_i)$，则有 $x_n\to x$. 令 $K=\{x\}\cup\{x_n: n\geqslant m\}\subset U$，由于 $\mathscr{P}$ 为 k-网，存在有限个 $P'_i\in\mathscr{P}$ $(i=1,2,3,\cdots,m')$ 使 $K\subset\bigcup_{i=1}^{m'}P'_i\subset U$. 于是存在 $P'_{i0}\in\{P'_1,\cdots,P'_{m'}\}$，$P'_{i0}$含有 $\{x_n: n\geqslant m\}$ 的子列. 故 $P'_{i0}\in\mathscr{F}_{x,u}$（注意 P'_{i0}是闭集），这与 x_n 的选取矛盾），对 $x\in W$，W 为 X 的开集，由事实（*），存在 $n\in N$，$\mathscr{F}\in\mathscr{P}'n$. 使 $x\in(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}\subset W$，不失一般性可进一步要求对 $\Gamma\subsetneqq\mathscr{F}$，有 $x\overline{\in}(U\Gamma)^{\circ}$，再由事实（*），存在 $m\in N$，$m\geqslant n$，$\mathscr{J}\subset\mathscr{P}'m$，使 $x\in(\bigcup\mathscr{J})^{\circ}\subset(\bigcup\mathscr{J})\subset(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}$，且 $x\in\bigcap\mathscr{J}$，由 $\mu_m(\mathscr{F})$ 的定义以及 $\mathscr{F}$ 的选取，我们有 $\mathscr{J}\subset\mu_m(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}m$. 从而有 $x\in(U\mathscr{J})^{\circ}\subset Wm(\mathscr{F})\subset(\bigcup\mu_m(\mathscr{F}))^{\circ}\subset(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}\subset W$，所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的基. ②对 $n\in N$，$\mathscr{B}n$ 是局部可数族.

对 $x\in X$，存在 Ux，使 $|\{P\in\mathscr{P}n: P\cap Ux\neq\Phi\}|\leqslant\omega$，若 $|\{Wn(\mathscr{F})\in\mathscr{B}n: Ux\cap Wn(\mathscr{F})\neq\Phi\}|>\omega$，则有不可数个 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}'n$，使 $\mu_n(\mathscr{F})$ 含有 $\mathscr{P}n$ 中的某个元素 A，令 $\mathscr{P}_m^n=\{\mathscr{F}\in\mathscr{P}n': |\mathscr{F}|=m\}$ $(m\in N)$，则 $\bigcup_m P_m^n=\mathscr{P}'n$，则存在某个 $m\in N$，$\mathscr{P}_m^n$ 含有不可数子簇 Σ，使 $A\in\mu_n(\mathscr{F})$ $(\mathscr{F}\in\Sigma)$. 令 $\mathscr{A}=\{R\subset Pn$: 存在不可数个 $\mathscr{F}\in\Sigma$，使 $\mathscr{P}\subset\mathscr{F}\}$，取 $\mathscr{R}_0\in\mathscr{A}$，且对 $R\in\mathscr{A}$ 有 $|R_0|\geqslant|R|$. 设 $\Sigma_1\subset\Sigma$，Σ_1不可数，对 $\mathscr{F}\in\Sigma_1$，有 $\mathscr{R}_0\subset\mathscr{F}$，显然 $|\mathscr{R}_0|<m$，由 $\mu_n(\mathscr{F})$ 的定义可知，$A\not\subset(\bigcup\mathscr{R}_0)^{\circ}$，取 $y\in A\setminus\bigcup\mathscr{R}_0)^{\circ}$，令 $B=X\setminus\bigcup\mathscr{R}_0)$，则 $y\in\overline{B}$，由于 X 是第一可数，故存在序列 $\{y_n\}$，$\{y_n\}\subset B$，$y_n\to y$. 由于 $y\in A\subset(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}$，$(\mathscr{F}\in\Sigma_1)$，则存在 $P\in\mathscr{F}$，使 $P\cap(\{y_n\})\neq\Phi$，但 $\{y_n\}$ 至多与可数 $P\in\mathscr{P}n$ 相交而 Σ_1不可数，因此存在 $P_0\in\mathscr{P}n$. $P_0\cap(\{y_n\})\neq\Phi$，$(\{y_n\})\cap(U\mathscr{R}_0)=\Phi$，故 $P_0\overline{\in}\mathscr{R}_0$，取 $\mathscr{R}_1=\mathscr{R}_0\cup\{P_0\}$，则 $\mathscr{R}_1\in\mathscr{A}$，$|\mathscr{R}_1|>|\mathscr{R}_0|$，矛盾. 所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ-局部可数基. 证毕

定理2 设 $X_i(i\in N)$有 σ-局部可数 k-网，若 $\prod_{i\in N}X_i$ 为 k-空间，则下列之一成立：(a) X_i $(i\in N)$ 都有 σ-局部可数基，(b) 除有限多个 $i\in N$ 外，X_i 均为紧可度量空间.

证明 若命题不成立，由引理1可知存在可数多个 X_i 不是可数紧的，且存在某一 X_i 不是第一可数的. 不妨设 X_i 不是第一可数，由于有可数多个 X_i 不是可数紧，则必然有 $\prod_{i\in N}X_i$ 的某一闭子集同胚于 $X_1\times N^{\omega}$. 故 $X_1\times N^{\omega}$ 是 k-空间. 对 $x_0=(1,1,\cdots)\in N^{\omega}$. 取 x_0的可数局部基 $\{U_n: n\in N\}$，$u_n=\{1\}\times\{1\}\times\cdots\times\{1\}\times\Pi N$，显然 U_n 不是可数紧的，由归纳可选取 N^{ω} 的子族 $\{D_{n_k}\}$，其中 D_{n_k}是 N^{ω} 的可数、无限、离散子集，满足 $D_{n_k}\subset U_{n_k}$，$D_{n_k}\cap D_{n_j}=\Phi$ $(j\neq k)$ 且 $x_0\overline{\in}D_{n_k}$，这里$1=n_1<n_2<n_3<\cdots$. 令 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_{n_k}\cup\{x_0\}$，则 F 是 N^{ω} 的闭子集，设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}n$ 为 X_1的 σ-局部可数 k-网. 由于 X_1不是第一可数的，则必有下列事实（**）：存在 $y_0\in X_1$以及 X_1中的单调下降集列 $\{An: n\in N\}$，$y_0\overline{\in}An$ $(n\in N)$ 满足条件 (α)：对 $y_n\in An$ $\{y_n\}$ 不收敛.（事实（**）的证明：假设事实（**）不成立，则对 X_1中的任一点 x 以及任意单调下降集列 $\{An: n\in N\}$，$x\overline{\in}An$，当 $x_n\in An$，$(n\in N)$ 时，$\{x_n\}$ 收敛. 令 $\{P\in\mathscr{P}: x\in P\}=\{Pi: i\in N\}$，则 $\{(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}: \mathscr{F}\subset\mathscr{P}, |\mathscr{F}|<\omega\}$ 构成 x 的可数局部基，否则对 x 的邻域 U，不存在 $\mathscr{P}$ 中有限子族 $\mathscr{F}$，使 $x\in(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}\subset U$. 令 $\mathscr{F}_{x,u}=\{P\in\mathscr{P}: x\in P\subset U\}=\{P_i: i\in N\}\}$，对 $n\in N$，$x\overline{\in}(\bigcup_{i=1}^{n}P_i)^{\circ}$，由于 X_1有点 G_δ 性质，故存在开集 Gn(不妨设 $Gn\supset\overline{G}_{n+1}$)，使$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{G}n=\bigcap_{n=1}^{\infty}Gn$，$x\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}P_i)\cap Gn$，存在 $x_n\in(X-(\bigcup_{i=1}^{n}Pi)\cap Gn$，则 $\{x_n\}$ 收敛且 $x_n\to x$. 由于 $\mathscr{P}$ 为 k-网，则存在 $\mathscr{P}$ 中有限子族 $\mathscr{F}$ 使 $\{x\}\cup\{x_n: n\in m\}\subset\bigcup\mathscr{F}\subset U$. 类似于事实（*）的证明可推出矛盾. 因此 X_1是第一可数的，矛盾.）由文献〔3〕推论3. 4，X_1有可数密度. 因此对 $n\in N$，存在 $En\subset An$，$|En|\leqslant\omega$，$y_0\in\overline{En}$. 令 $X'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{En\times\{n\}\}\cup\{y_0\}$，赋予 X'拓扑如下，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{En\times\{n\}\}$ 中每一点都是孤立点，$\{y_0\}$ 的邻域定义为 $\{V_n(y_0): n\in N\}$，$V_n(y_0)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{Ei\times\{i\}\cup\{y_0\}$. 则 X'同胚于 F. 下面待证 $X_1\times X'$不是 k-空间. 令 $A=\{(x,(x,n))\in X_1\times X': n\in N, x\in En\}$ 则 $(y_0,y_0)\in\overline{A}-A$，从而 A 不是 $X_1\times X'$的闭集. 下面只须证明对 X_1的紧子集 K_1和 X'的紧子集 K_2都有 $A\cap(K_1\times K_2)$为 $K_1\times K_2$的闭子集即可. 取 $Z\in K_1\times K_2-A\cap(K_1\times K_2)$，我们不妨设 $Z=(x,y_0)$（其它情形容易证明存在 Z 的邻域 $V(Z)$，使得 $V(Z)\cap(A\cap(K_1\times K_2))=\Phi$)，由条件 (α) 可知存在 $i_0\in N$，使 $Ai_0\cap K_1=\Phi$（否则，$\forall i\in N$，都有 $Ai\cap K_1\neq\Phi$，取 $x_i\in Ai\cap K_1$，由于 K_1可度量，则 $\{x_i: i\in N\}$ 必有收敛子列，因为 $\{A_i\}$ 单调下降，所以不难从 A_i 中取出 x_i'，使 $\{x_i': i\in N\}$ 有极限，与条件 (α) 矛盾）. $X\times Vi_0(y_0)$ 为 Z 的邻域且 $(X_1\times Vi_0(y_0))\cap(A\cap(K_1\times$

（下转第11页 Continue on page 11）

表4 薄板的跨中挠度及弯矩

Table 4 Central deflexion and bending moment of thin slab

$\mu=0.3$	$n=10$			$n=32$			$n=30$		
	四边简支 Four sides simply-supported			两对边简支,两对边固定 Two opposite sides simply-supported and the other two sides clamped			三边简支,一边固定 Three sides simply-supported and one side clamped		
	$W_中$	$M_{x中}$	$M_{y中}$	$W_中$	$M_{x中}$	$M_{y中}$	$W_中$	$M_{x中}$	$M_{y中}$
$m=1$	0.004103	0.04933	0.05165	0.001953	0.03462	0.02793	0.002821	0.04048	0.03749
$m=3$	−0.00005	−0.00154	−0.00447	−0.000048	−0.00160	−0.00437	−0.000049	−0.00157	−0.00446
Σ	0.004053	0.0478	0.0472	0.00191	0.03302	0.0236	0.00277	0.0389	0.0330
精确解 Exact	0.00406	0.0479	0.0479	0.00192	0.0332	0.0244	0.0028	0.039	0.034
乘子 Multiplier	qb^4/D	qb^2	qb^2	qb^4/D	qb^2	qb^2	qb^4/D	qb^2	qb^2

n=单元数 Number of elements. $W_中$——W_{centre}; $M_{x中}$——$M_{x\text{-}centre}$; $M_{y中}$——$M_{y\text{-}centre}$

表5 静水压力下板的跨中挠度和弯矩

Table 5 Deflexion and beading moment of thin slab under hydrostatic load

$n=20$	$m=1$	$m=3$	Σ_m	精确解 Exact	乘子 Multiplier
$W_中$	0.001517	−0.000025	0.001492	0.0015	q_0b^4/D
$W_{x中}$	0.020995	−0.000780	0.020215	0.020	q_0b^2
$W_{y中}$	0.019926	−0.002257	0.01767	0.018	q_0b^2

n=单元数 Number of elements. $W_中$——W_{centre}; $M_{x中}$——$M_{x\text{-}centre}$; $M_{y中}$——$M_{y\text{-}centre}$

表6 变厚度板的跨中挠度和弯矩

Table 6 Deflexion and beanding moment of variable thickness slab under variable distributed loading

$n=20$	$m=1$	$m=3$	Σ_m	有限条法 Finite strip method	乘子 Multiplier
$W_中$	0.001250	−0.000015	0.001235	0.001237	qb^4/D_0
$W_{x中}$	0.044458	−0.001376	0.04308	0.04312	qb^2
$W_{y中}$	0.051222	−0.004602	0.04662	0.05018	qb^2

n=单元数 Number of elements. $W_中$——W_{centre}; $M_{x中}$——$M_{x\text{-}centre}$; $M_{y中}$——$M_{y\text{-}centre}$

限元法、有限条法的计算格式在某种程度上得到统一。因而有限样条元法可以充分利用现有的有限元法、有限条法计算程序及其它现有成果，并且对于结构形状、荷载和边界条件的适用性较强。

参考文献

1 秦 荣著. 结构力学的样条函数方法. 南宁：广西人民出版社，1985年。

2 Cheng Y K. Finite strip method in structure analysis. Pergamon Press, 1976.

（责任编辑：蒋汉明）

（上接第6页 Continue from page 6）

K_2)) $=\Phi$，从而 $A\cap(K_1\times K_2)$ 为 $K_1\times K_2$ 的闭集. 因此 $X_1\times X'$ 不是 k-空间，所以 $X_1\times F$ 也不是 k-空间. 由于 $X_1\times F$ 是 $X_1\times N^\omega$ 的闭集，所以 $X_1\times N^\omega$ 不是 k-空间，矛盾. 证毕

众所周知，具有 σ-局部可数基的空间在完全映射下不是逆保持的. 但我们有下面定理：

定理3 设 f: $X\to Y$ 为完全映射，Y 有 σ-局部可数基，则 X 有 σ-局部可数基的充分必要条件是 X 有 σ-局部可数 k-网.

证明 设 $x\in X$，则 $x\in f^{-1}(f(x))$，$f^{-1}(f(x))$ 为 X 的紧子集. 由于 f 是闭映射，Y 是第一可数的，容易证明 $f^{-1}(f(x))$ 有可数特征，从而 X 为 q-空间. 由定理1命题得证. 证毕

参考文献

1 Fleissner W G, Reed G M. Paralindelof spaces and spaces with σ-locally countable base. Top. proc. 1977, 2: 89～110.

2 Gruenhage G. Generalized Metric Spaces. Handbook of set-Theoretic Topology. Ed by K. Kunen J. Vanghan, 1984, 425～501.

3 Gruenhage G, Michael. Eand Tanaka. Y. Spaces determined by point-countable covers. 1984, 113: 303～332.

（责任编辑：蒋汉明）