广西科学 Guangxi Sciences 1 (4): 6～13, 22 1994

感知和判断中的基准变换及其性质坐标分析法*

Criterion Transition in Perceptual and Judgment and Its Attributive Coordinate Analytics Orientation

冯嘉礼
Feng Jiali
(广西师范大学计算机应用技术研究所 桂林市三里店 541004)
(Institute of Computer Application Technique, Guangxi Normal University, Sanlidian, Guilin, 541004)

詹 明
Zhan Ming
(天津长途电信局 天津 300052)
(TianJin Long-Distance Communication Office, TianJin, 300052)

叶中行
Ye Zhongxing
(上海交通大学应用数学系 上海 200030)
(Dept. of Application Math., Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030)

摘要 感知识别和概念判断分别是直感(形象)思维和逻辑(抽象)思维的基础，其基准可随外部条件和思维者认知结构而变的现象，是识别、判断和推理等产生各种不确定性和矛盾性的根源，感知与判断的描述，需要一种既能容纳对象属性和人类基准的表示系统，又能刻划它们之间的关系及其变化规律的分析方法. 根据神经生理实验和心理学理论，将感觉和知觉分别定义为神经元(或集团)对事物简单属性和整合(整体和综合)属性的识别映射；给出了思维科学的两个基本命题：(1)事物性质元间基于整合的生成结构能在感知记忆集中得到保持的充要条件是感知觉是一个同态映射；(2)事物性质元间的推理关系能在感知记忆范畴中得到保持的充要条件是感知觉是一个范畴函子. 事物性质元间的生成与推理结构有一个同构的表示模型——性质单纯形 K 的重心剖分复形 $K^{(m)}(X)$，简称性质坐标系，框架和网络可作为子复形嵌入其中，对象属性和心理基准，以及它们之间关系的变化规律可在性质坐标系 $K^{(m)}(x)$ 中得到表示，人类感知识别、概念判断以及基于它们的推理和决策等都可在其中得以统一刻划.

关键词 感知识别 概念判断 感知同态 感知函子 基准变换 性质坐标分析法 思维科学

Abstract Perceptual recognition and conceptual judgment are respectively basis of intuitive (or image) thinking and logical (or abstract) thinking. Variability of their criterions are the basic and reasons why various uncertainties and contradictories are emegered from recognition , judgment and reasoning. The description of recognition and judgment needs not only a representation system in which both (integrant) attribute of object and judger's criteria can be contained, but also an analystic approach that can describe the relationships between integrant attribute and judger's criteria and their change law . According to neurophysiology experiment and psychology theory, senation and perception can be respectively defined as recognition maps of neuron (or gourp) respectively to monotomicity and integrant attributive of objects and two fundamental propositions of noetic science are given as follows: (1) The integration structure among object attributes can be conserved in perceptual memory, if and only if perception is a homomorphism between the attribute set of object and the set of perception memory. (2) The reasoning relation among object attributes can be conserved in perceptual memory, if and only if perception is a functor between the category of attribute reasoning and the category of human reasoning in memory. An attributive coordinate analytics, in which the criterion of recognition and judgment and their change law can be represented, is provided , and some intelligent characteristics of human thought, such as nonmonotonicity of commonsense reasoning, contradictory and fuzziness of commonsense

1994-09-20 收稿。
* 国家自然科学基金和国家攀登计划基金资助课题。

judgment, and tendentiousness of empirical decision and so on can be described by mathematical language.
Key words recognition, judgment, perception homomorphism, perception functor, criterion transition, attributive coordinate analytics, noetic science

0 引言

感知识别是人类直感（形象）思维的基础，心理学将感觉看作是神经系统对外界事物的个别或简单属性的反映，知觉是对事物的整合（整体和综合）属性的反映[1]. 为了进行属性识别，各感觉和知觉神经元（或集团）应有一个针对其识别属性的检测基准，否则，就无法操作. 因此，继承或建构一个基准是感知的操作前提. 在现实生活中，模式属性及其结构关系会随时空而变，假若人们仅记住标准模式，而不能记住各种畸变模式的识别基准，或根据畸变规律将基准生成出来的话，就会产生识别障碍. 例如，模式“A”会随字体（如意大利体，罗马体和花体），书写者习惯和缺损程度而异，如果我们不掌握字体变化的规律，并记住某人特殊的书写模式的话，就会“一字”不识. 反过来，当人们用不同的基准去识别同一模式时，其结果往往会“差之毫厘，谬之千里”. 例如，分别以英语、俄语、汉语拼音和音符的基准去识别模式“A”，会读（或唱）成不同的读（唱）音，并理解为不同的涵义；分别以不同调式的基准去听同一个音，会听为不同的唱名，如“A”在 A 调和 D 调中，分别为“do”和“so”；分别以夏天和冬天的体表温去检测（几乎）同样温度的井水，会有“凉爽”和“暖和”的两种感觉. 这表明，人类感知会随识别基准而变，或者说，基准可变是感知产生各种不稳定性和不可靠性的主要根源.

概念判断是人类逻辑（抽象）思维的基础，定义是它的操作基准（或判据），它由内涵诸属性组成，因此，能否形成并将内涵诸属性记住，是概念判断的前提. 内函是从大量对象中抽象出来的，故具有一定的普遍性或概括性. 但抽象过程存在着归纳不完全性，它使得除少数所谓纯理论（如纯数学）的概念外，几乎所有实用概念的内函属性与其外延集合都是不一致的.（这正是集合论只研究与一个集合对应的所谓“确定性质”[2]，并置“一般性质（论）”的研究于度外的根本原因.）在碰到属性与其判据有出入的对象时，需要对判据作适当修正，才能得到真实的判断. 例如，通常把鸟定义为“会飞的、有翅膀和羽毛的卵生动物.”但对鸵鸟和企鹅等“不会飞的鸟”，就要将“会飞”刨掉，才能将它们判为“鸟”. 若死抱定义不变的话，就只有采用让对象满足定义的“削足适履”法，才能得到正确判断. 然而，这会产生一系列逻辑问题，如所谓“鸵鸟是鸟，故鸵鸟会飞”的非单调推理，就是不顾“会飞”已被刨掉的事实，仍用原定义作推理而产生的（与“削足适履”相反，不妨称之“为鸵增飞（辉）”，反之，只要容许判据（既定义）可变，这类所谓的逻辑矛盾，就可用判断逻辑作出合理的解释[3].（在 Minsky 提出非单调推理以前，人们一直没将它当作难以理解的问题的原因，也许是人类从来就认为概念的判据是可变的）. 事实上，只要容许将“年轻”概念的年限，在碰到政治家和运动员等特殊对象时，分别放宽和缩小，就不难理解为什么 60 岁的政治家可说成“年轻”的，而 19 岁的女体操运动员反到会“太老”了. 既使在量子力学中，波和粒子概念的判据也是随空间层次而变的.（故所谓“波粒二象性问题”也可用基准变换来解释[4]）总之，概念基准可随具体对象和问题，以及人们的认知结构而变的现象是普遍存在的，特别是基准可随人而变的现象是思维科学特有的.（也许这正是老子的“名，可名，非常名”所指的一种情况.）显然，不仅概念判断，而且，推理和其它思维操作所产生的各种不确定性和矛盾性现象，如非单调性、模糊性和歧义性等，都可从基准可变找到其逻辑根源.

基准确定以后，识别和判断就是一些机械的操作，故只要能将对象属性和人类基准，以及它们之间的相互关系和变化规律（特别是后者）表示出来的话，感知识别和概念判断就可机械地加以实现. 事实上，神经网络和专系统之所以能自动进行某些识别和判断，就因为它们能自动，或在人的帮助下建立其操作准则. 因此，能否找到这样一种表示系统和分析方法，已成为感知与判断模拟中的核心课题. 由于感知神经元（或集团）的识别基准与其识别属性间存在着一一对应的关系，而概念定义又是由各对象的共同属性组成的，所以，感知和判断的基准是有可能用事物属性来加以统一表达的.

事实上，神经网络的输入信息就是模式 x，及其失真（或畸变）模式 x' 和其它模式 y 的各种属性和值，分别用 $p_i(x), q_j(x')$ 和 $s_k(y)$ 表示. 注意，这里 $p_i(\alpha)$ 可以是模式 α 内各部分或各属性之间的关系 $r_i(\alpha,\alpha)$ 或 $r_i(p_{i1}(\alpha), p_{ik}(\alpha))$；$\alpha \in \{x, x', y\}$；$i, j, k$

$\in N$. 若用 $p(x) = \wedge\ p_i(x), q(x') = \wedge\ q_j(x')$ 和 $s(y) = \wedge\ s_k(y)$ 分别表示模式 x, x' 和 y 各属性的整合(或综合),(由于整合 $\wedge$ 是对事物 α 自己的各属性(包括值)所进行的合取,故可认为整合是对 α 各属性和关系所进行的一次综合集成[5]. 考虑到表示的有限性和演算的方便性,也可用向量:$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_l)$ 表示,这时,x_i, x'_j 和 y_k 分别为相应属性的值(对非数值属性为真值). 由于向量,特别是它的(广义)坐标表示是用一个点代表其所有分量(即属性值),故可认为是一种综合集成的表示形式). 在正常情况下,只要有一种属性 $q_j(x')$ 的值与 x 有所不同,x' 就可算 x 的一个失真模式,而至少要有一个 x 所没有的属性 $s_k(y)$,或者多个属性值都与 x 的不同时,才能将 y 看作是不同于 x 的模式. 所以,各整合属性 $p(x)$, $q(x')$ 和 $s(y)$ 在赋范属性空间 Γ 中一般存在着下述(范数)不等式:

$$|p(x) - q(x')| < |p(x) - s(y)| \qquad (1)$$

若令 $D_o = \max_{x'}\{D(x,x') = |p(x) - q(x')|\}$, 由于 x 及其畸变模式 x' 都包含在以 x 为心,D_o 为半径的邻域 $N = \{\alpha | D(x,\alpha) \leqslant D_o\}$ 中,故模式识别 $R(x, \alpha)$ 可用下述谓词函数表示:

$$t(R(x,\alpha)) = \begin{cases} 1 & iff \quad D(x,\alpha) \leqslant D_o \\ 0 & iff \quad D(x,\alpha) > D_o \end{cases} \qquad (2)$$

它等价于:

$$t(R(x,\alpha)) = \begin{cases} 1 & iff \quad \alpha = x \ or \ \alpha = x' \\ 0 & iff \quad \alpha = y \end{cases} \qquad (3)$$

这就是说,将模式 x 及其畸变 x' 归为一类,并将模式 y 与它们区分开来的识别 $R(x,\alpha)$ 是以 D_o 为基准的.

从拓扑学的观点讲,关系式(1)反映的是模式间的近邻(即亲疏)关系,由于{0,1}构成一个(离散的)赋范拓扑空间 Γ',所以,上述识别操作可看作是一个保持模式间近邻关系不变的拓扑映射.

然而,当模式发生非线性畸变时,近邻关系式(1)将被畸变的混沌性分布所破坏,显然,如果存在一个(非线性)映射 $f: \Gamma \longrightarrow \Gamma'$,使得(1)式能在 Γ' 中显露出来的话,那么,由 f 所诱导的等价关系 R 可得所求之分类 Γ/R. 因此,我们所需要的是构造一个适当的拓扑变换,使 Γ 中与(1)式矛盾的拓扑(结构),通过 f 诱导(或生成)出一个与(1)相容的新拓扑. 可见,任何识别与聚类操作,都可看作一个拓扑映射过程. 这正是人工神经网络要利用若干隐含层来完成一个非线性的(拓扑)变换,并可用一个微分动力函数来实现该变换的拓扑学根源. 事实上,如果将网络的不动点,对应于属性空间中模式 x 的所有不变属性的整合 $p(x)$ 的坐标点(想一想 Hopfeild 算法与最小二乘的关系,就不难理解这一点). 并将隐含层和各权重的综合作用,对应于拓扑基的变换和基准 D_o 的建构过程的话,我们就可将各种收敛算法看作是识别基准(拓扑)域 $N(p(x), D_o)$ 的建构算法. 显然,这种解释要比从最小能量原理,遗传学和神经微结构角度等所作的解释更自然,也更接近思维操作的现实.

在框架(frame)表示法中,概念(A)被放在其顶点上,各内函属性和值被放在各结点和槽中. 当对象 x 属性与框架各槽都匹配时,可得判断"x 是 A". 这里,基准是由整个框架构成和(综合)表示的,由于框架系统只是一个属性网络,但非坐标结构. 所以,如果能将它嵌入一个能表示神经网络的属性坐标系统的话,它们就有可能得到统一的表达. 而且,只要容许概念判据及其坐标(框架)可随具体情况而变的话,就可适应各种不确定性判断的表达. 而所谓专家系统的脆弱性问题,也将迎刃而解. 事实上,它本来就是因概念判据和表示框架的一成不变性引起的.

本文在下述感知同态的数学原理基础上,提出了一种既能统一框架和网络,又能对对象属性和人类心理基准加以表示,还能对它们之间的变化规律进行数学分析的方法——性质坐标分析法.

1 感觉、知觉与事物属性的识别

H. Hartline 所发现的侧抑制效应(又称 Hebb 律),既神经元间连接强度随刺激重复而增的效应是神经系统进行"特征抽取"的基本机制. 而 D. Hubel 和 H. Wiesel 所发现的"特征检测"(feature detector)和等级抽象的"特征整合"效应,则是感觉和知觉分别对复杂程度不同的模式进行识别的基本机制[6,7]. 由于特征抽取就是建构基准(就识别而言,"学习"一词不如"构建基准"更贴切)所以,它们分别是识别三操作的神经生理学基础. 人们从侧抑制效应的模拟出发,提出了各种收敛性算法,如 Hopfield 算法,反向传播算法和遗传竞争算法等. 由于特征抽取可看作是概念抽象的特例,而概念抽象可用性质范畴及态射范畴的商范畴表示[9,10]. 故经适当处理后,我们不难将特征抽取也用类似的形式加以表示,并用某种相应的算法实现,故本文仅讨论特征检测和特征整合的表示方法.

我们知道,心理学分别将感觉和知觉看作是人脑对事物简单属性和整合属性所作的反映:即:一类感觉神经元(或集团)只能对对象,如苹果 a 的一种简单属性,如红色 $r(a)$,球形 $b(a)$ 和香味 $w(a)$ 等作特征检测;而知觉则负责将各种简单属性的感觉映像元

全部整合起来，以形成大脑对苹果 a 的整合（整体或综合）意识（即知觉）．不妨设 s_i 是检测 x 是否具有简单属性 $s_i(x)$ 的感觉神经元（或集团），由于任何对象 x 都是以其整合属性 $p(x)$ 的形式表现其自身并被人们所感知的，所以，s_i 所作的特征检测就是看 $p(x)$ 是否包含 $s_i(x)$ 作为其因子属性，故有：

定义 1 感觉神经元（或集团）s_i 对整合属性 $p(x)$ 所作的特征检测是从属性集 P_x 到思维主体 y 对 x 的感知记忆集 $M(x,y)$ 的映射 $s_i:P_x \to M(x,y)$，使得：

$$s(p(x)) = s_i \triangle p(x) = \begin{cases} s_i(x,y) & \text{若 } s_i(x) \text{ 是 } p(x) \text{ 的简单因子} \\ s(x,y) & \text{否则.} \end{cases} \tag{4}$$

感觉是由诸 s_i 构成的向量映射 $s=(s_1,\cdots,s_n):P_x \to M^n(x,y)$．

尽管 $s_i(x)$ 和 $s_i(x,y)$ 分别属于 P_x 和 $M(x,y)$，但它们所指的却是同一个属性或特征，$\triangle$ 称为抽取算子，因为它具有特征抽取功能．知觉 t 对各感觉映像元所进行的（特征）整合可表为：

定义 2 知觉对 x 诸感觉映像元的整合是映射 $t:M^n(x,y) \to M(x,y)$，使得：

$$t(s_1(x,y),\cdots,s_n(x,y)) = \wedge\, s_i(x,y) = p(x,y). \tag{5}$$

这里，$p(x,y)$ 是整合诸 $s_i(x,y)$ 项得到的一个整合性质，（谓词合取 $\wedge$ 不可能将诸谓词简单地整合为一项，知觉则要求整合 $\wedge$ 是合一的）故感知可表为：

定义 3 从 x 的性质集 P_x 到 $M(x,y)$ 间的感知是一个映射 $f:P_x \to M(x,y)$，它是感觉 $s:P_x \to M^n(x,y)$ 和知觉 $t:M^n(x,y) \to M(x,y)$ 的复合映射，即 $f = t\circ s$．

显然，若感知觉没有毛病，那么，苹果的既红又圆的（整）合性质 $p(a)=r(a) \wedge b(a)$ 在记忆集 $M(x,y)$ 中的映像 $p(a,y)$，与 $r(a,y)$ 和 $b(a,y)$ 之间应满足 $p(a,y)=r(a,y) \wedge b(a,y)$ 的关系．反之，则说明感知不正常（如图 1 所示）．故有命题：

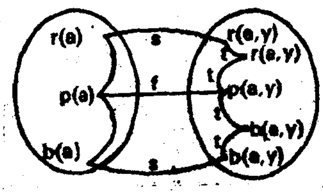


图 1　感知同态示意图

Fig. 1　Sketch graph for perception homomorphism

命题 1 事物 x 诸属性元间基于整合的生成结构能在记忆集 $M(x,y)$ 中得到保持，当且仅当对任意 $r(x),b(x) \in P_x$ 和 $p(x)=r(x) \wedge b(x)$，下述同态关系式(6) 成立．

$$\begin{aligned} f(r(x) \wedge b(x)) &= f(p(x)) = p(x,y) \\ &= r(x,y) \wedge b(x,y) \\ &= f(r(x,y)) \wedge f(b(x,y)) \end{aligned} \tag{6}$$

证明：充分性．由事物属性间基于整合的生成关系满足结合性（这一点与谓词合取相同）和归纳法，可知：关系式(6) 对任意多个属性的整合生成关系也是满足的，故基于整合的任何生成结构都能在记忆集 $M(x,y)$ 中得到保护．

必要性是显然．

于是，我们得到思维科学的一个基本命题：

基本命题 1 事物 x 诸属性元间基于整合的生成结构能在记忆集 $M(x,y)$ 中得到保持的充要条件是，感知映射 $f=t\circ s$ 是性质集 P_x 与 $M(x,y)$ 间的一个同态．

在感知觉是同态映射（即正常）的前提下，我们可将感知觉同态地转化到事物性质集中来讨论的．为此，我们先要研究基于整合的性质集结构．

2　有关事物性质集结构的某些结果简介[9,10]

定理 1 事物 x 的性质集 P_x 连同整合 $\wedge$ 构成性质幺半群 $M(P_x,\wedge)$，它有一个同构的（代数拓扑）表示模型，即性质单纯形 $K(x)=(e_0(x),e_1(x),\cdots,e_n(x))$ 的重心剖分复形 $K^{(m)}(x)$，这里 $e_i(x)$ 是 x 的 $n+1$ 个素性质，m 是 $K^{(m)}$ 的剖分层次，它们由幺半群 $M(P_x,\wedge)$ 的生成关系结构决定．（$K^{(m)}(x)$ 实际上是按 $M(P_x,\wedge)$ 构造出来的）[9,10]．

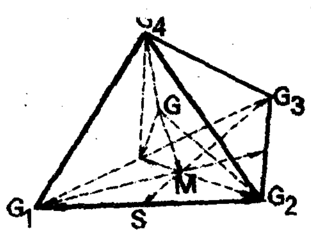
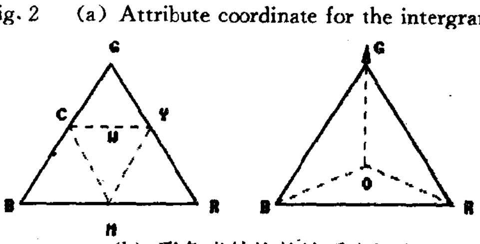


图 2　(a) 群的性质坐标表示

Fig. 2　(a) Attribute coordinate for the intergrant



(b) 彩色光结构的性质坐标表示

(b) Attribute coordinate for colour light structure

注：$K^{(m)}(x)$ 包含一个线性坐标系和一个重心坐标系，它可用坐标方法表现事物 x 的质和量统一的性质元间的生成关系及变化规律，故又叫 x 的性质坐标系.（图 2(*a*) 表示的是诸群公理性质间（纯质）的生成关系；图 2(*b*) 与 (*c*) 分别表示诸彩色性质元间纯质（色）的和质与量统一的生成变化关系）值得指出的是，从代数拓扑的角度讲，神经网络和 frame 都是一维复形，而 $K^{(m)}(x)$ 则是一个 n- 维复形，[11] 所以，它们可作为一个子结构嵌入到 $K^{(m)}(x)$ 中，这就从数学上保证了：能用神经网络表达的感知识别和能用 frame 表达的概念可在 $K^{(m)}(x)$ 中得到统一的表达.

定理 2　性质集 P_x 中的两性质间的推理关系"$p(x) \rightarrow q(x)$"成立，当且仅当吸收关系"$p(x) \wedge q(x) = p(x)$"成立.（注：定理 2 仅对 x 的性质而言，因 x 可为任一事物，而谓词推理经适当转化后，都可看作某个 n 元序偶 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的两个性质间的推理，故经适当转化后，定理 2 对谓词推理也适用.）[9,10].

任何幺半群都构成一个范畴，带有一个拟序的任何集合也构成一个范畴[12]. 所以，我们有：

定理 3　幺半群 $M(P_x, \wedge)$ 既是一个范畴 $C(M_x)$，又是一个基于吸收关系的推理拟序范畴 $Ca(Mx, \rightarrow)$，这里 $\rightarrow \in \hom(p(x), q(x))$ 为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 间的推理.

定理 4　$K^{(m)}(x)$ 连同由其真子面拟序 $>$（它与吸收拟序等价）构成范畴 $C(K^{(m)}(x), >)$，且它与范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$ 等价.

由定理 4 知：x 诸性质间的推理可用 $K^{(m)}(x)$ 中的真子面拟序表示. 由于后者可用性质坐标进行计算，所以，性质推理也可用性质坐标进行计算[9,10].

定理 5　x 的性质集 P_x 连同抽取和整合运算，构成一个完全分配格 $L(P_x, \triangle, \wedge)$，其中的最小元 0_x 和最大元 I_x 分别是 x 的自我恒同性 I_x 和它的所有性质生成的整合元. 即 $0_x = I_x$ 和 $1_x = \wedge\ p_i(x), i \in I$.

可以证明：由抽取 $\triangle$ 和整合 $\wedge$ 算子所确定的拟序就是基于吸收的拟序，故下述定理 6 成立.

定理 6　事物 x 的完全分配格 $L(P_x, \triangle, \wedge)$ 与推理格 $L(P_x, \rightarrow)$ 等价.

不妨称带格的拟序范畴为拟序格范畴. 于是 $L(P_x, \rightarrow)$ 是一个拟序格范畴. 记为 $C(L_x, \rightarrow)$.

由定理 2 和 6 可得：

定理 7　格范畴 $C(L_x, \rightarrow)$，推理范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$ 和真子面拟序范畴 $C(K^{(m)}(x), >)$ 三者等价.

由上述讨论可知. 性质集 P_x 连同算子 $\triangle$ 和 $\wedge$，生成的各种代数结构，都可在 $K^{(m)}(x)$ 中用相应的性质坐标表示出来，特别地，各种推理关系通过其真子面拟序都可转化为相应的坐标计算问题. 为了将能将人类感知、判断与推理等思维操作转化到性质集中来讨论，我们还要下述定理和命题作为其数学基础.

定理 8　记忆集 $M(x,y)$ 连同诸感知映像元间的推理拟序 $\rightarrow'$ 构成一个范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$，这里 $p(x,y), q(x,y) \in M(x,y)$，而 $\rightarrow' \in \hom(p(x,y), q(x,y))$ 是 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$ 间由知觉整合 $\wedge$ 所确定的推理.

定义 5　感知函子 F 是从范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$ 到的推理范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$ 的映射 $F{:}C \rightarrow D$，它满足：

(1) 对任意对象 $p(x) \in C$，有：$F(p(x)) = p(x, y) \in D$，特别地，对对象 $P_x \in C$，有：$F(Px) = M(x, y) \in D$.

(2) 令 $\alpha \in \hom(p(x), q(x))$，$\beta \in \hom(q(x), r(x))$ 和 $\gamma \in \hom(p(x), r(x))$ 分别是 $p(x)$ 和 $q(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$，$p(x)$ 和 $r(x)$）间的推理拟序 $\rightarrow$，并令 $F(\alpha) \in \hom(p(x,y), q(x,y))$，$F(\beta) \in \hom(q(x,y), r(x,y))$ 和 $F(\gamma) \in \hom(p(x,y), r(x,y))$ 分别是 $p(x,y)$，$q(x,y)$ 和 $r(x,y)$，$p(x,y)$ 和 $r(x,y)$ 间的推理拟序 $\rightarrow'$，则下述关系显然成立.（如图 3 所示）

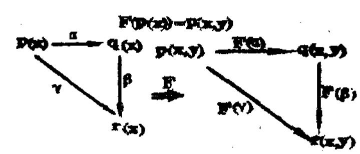


图 3　性质集与感知记忆集的范畴同态

Fig. 3　Homomorphism between the attribute set category and the category of perception memory

$$F(\beta \cdot \alpha) = F(\beta) \cdot F(\alpha) = F(\gamma) \qquad (7)$$

不难看出，要使事物性质间的推理关系能在记忆推理范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$ 得到保持的话，感知觉必须是满足定义 5 的一个感知函子 F. 反过来，若感知觉的确是函子 F 的话，推理关系一定能在记忆集中得到保持. 由此，我们得到思维科学的另一个基本命题：

基本命题 2　事物 x 诸属性间的推理关系可在记忆集 $M(x,y)$ 中得到保持的充要条件是，性质推理范畴 $Ca(Mx, \rightarrow)$ 和记忆集中的推理范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$ 间的感知觉是函子 F. 或者说，感知记忆集中的推理可转换到性质推理范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$ 中来讨论，当且仅当范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$，

$\rightarrow'$）与性质推理范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$ 同态.

由于性质推理范畴 $Ca(M_x, \rightarrow)$，推理格范畴 $C(Lx, \rightarrow)$ 与真子面范畴 $C(K^{(m)}(x), >)$ 三者等价，故由基本命题 2 知，记忆推理范畴 $Dr(M(x,y), \rightarrow')$ 中的推理 $\rightarrow'$ 可在 $K^{(m)}(x)$ 中用相应的性质坐标表示并计算出来，它们之间的这种关系可由图 4 加以说明.

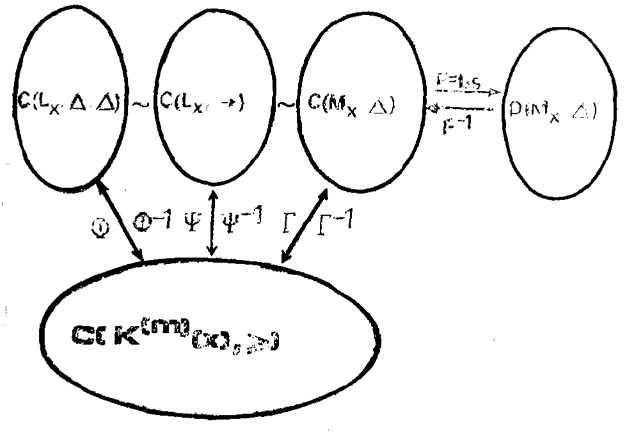


图 4 $K^{(m)}(x)$ 与记忆集 $M(x,y)$ 的范畴同态

Fig. 4 Homomorphism between category of $K^{(m)}(x)$ and memory set $M(x,y)$

显然，假如人类思维与外部事物属性集间没有某种对应关系的话，那么，人们对存在于人脑内的各种思维推理规律所作的各种间接性研究，就类似于"席地谈天"——神话. 反过来，形式逻辑、数理逻辑、神经网络和专家系统等要么是在大脑外的某个性质集（谓词可用一个性质来定义，故谓词集就是性质集），要么是在某个 $K^{(m)}(x)$ 的子结构中进行的，它们之所以能够将思维的某些规律（如推理）弄清楚的事实至少已经告诉我们：头脑内的思维规律与事物性质集及其坐标结构表示模型 $K^{(m)}(x)$ 之间，的确是存在着某种对应关系的. 如果本文的两个基本命题就是这种对应关系中两个的话，那么，它们就应该是思维科学的两个基本命题（或原理）. 显然，它们要比物理符号假设所表述的对应关系要来得更深刻，也更明确得多.

下面我们以人类思维过程中的几种典型的基准变换问题为例，分别给出常识判断、模糊判断和经验性决策等思维操作的性质坐标表示和分析法.

3 基准变换及其数学表示

3.1 属性加减型基准变换与常识判断的性质坐标表示

我们在前面已看到，为了将不会飞的鸟归到鸟类（即集合）中，需要将"会飞"这个条件从鸟的定义基准中刨掉. 若设 $b(x)$ 和 $c_i(b)$ 分别为命题"x 是鸟"和它的判断基准，为表示简单计，令 $c_i(b) = f \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$. 这里，$f, p_1, p_2$ 和 p_3 分别表示"会飞"、"有翅膀"、"有羽毛"和"是卵生动物"等 4 个属性. 并用 $c_j(b) = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ 表示从 $c_i(b)$ 中刨掉"会飞"条件后的新基准，则该基准变换可表示为：

$$T_{ij}(c_i) = c_i - f = c_j \tag{8}$$

如图 5 所示，我们把 f, p_1, p_2 和 p_3 分别置放在一个三维单纯形 K_3 的 4 个顶点上，把基准 $c_i = f \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ 和 $c_j = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ 分别置放到鸟的性质坐标系 $K_3^{(1)}(b)$ 和二维子单形 $K_2 = (p_1, p_2, p_3)$ 的重心点 $b(K_3)$ 和 $b(K_2)$ 上，由于 $K_3^{(1)}(b)$ 是一个重心坐标结构，故诸属性间的推理"$-\rightarrow$"可用重心点与其各个顶点间的真子面拟序表示，并可转化为相应的坐标计算，即该逻辑问题可转化为代数计算问题. 此外，由于基准变换 $T_{ij}(c_i) = c_i - f = c_j$ 就是重心点从 c_i 转移到 c_j，故若用 X_i 和 X_j 分别表示满足基准 c_i 和 c_j 的鸟的集合，用 $X_{\bar{f}}$ 表示 X_j 中不会飞的鸟集，则判断基准从 c_i 变到 c_j，就恰好对应于外延集从 X_i 扩充到 X_j 的变换.

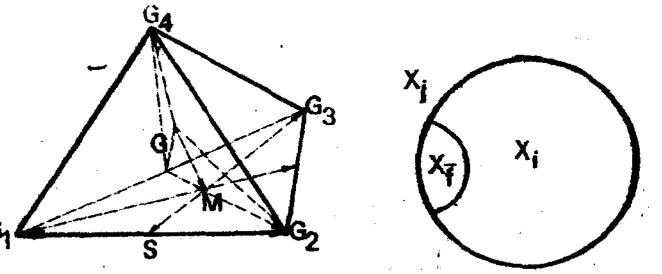


图 5 非单调推理的性质坐标表示

Fig. 5 Attribute Coordinate for nonmonotonic reasoning

可见，属性增加或减少型的基准变换及其（常识）判断和推理是可用性质坐标模型加以形式化表示和计算的.

3.2 属性值（区间）放大缩小型的基准变换与模糊判断的性质坐标表示

设 $p(x)$ 为命题"x 年轻"，显然，其判断基准或年龄范围是随职业放大和缩小的. 如用 $N_o = [18, 35]$，$N_1 = [14, 24]$，$N_2 = [18, 45]$ 和 $N_3 = [30, 60]$ 分别表示"普通年轻人"，"年轻运动员"，"年轻科学家"和"年轻政治家"等的基准区间，那么，人们根据对象 x 的不同职业，采用不同基准 N_i 的基准变换，就可表示为：

定义 6 设 $N(p) = \{N_i | i \in I\}$ 为命题 p 的判断

基准 $N_i(p)$ 的族，称映射 $T:N(p)\to N(p)$，为命题 p 的基准变换，如果对任意 $N_i\in N(p)$，存在一个 $N_j\in N(p)$，使得：

$$T(N_i)=N_j \tag{9}$$

或记为：$T_{ij}(N_i)=N_j$.

当 N_i 为一维球形域时，即 $N_i=N_i(o_i,r_i)$ 这里，o_i 和 r_i 分别表示邻域 N_i 的球心和半径. 例如 $N_1=[14,24]=N_1(o_1,r_1)=N_1(19,5)$. 变换 T_{ij} 就是下述平移和伸缩的合成：

$$T_{ij}(o_i)=o_i+c_{ij}=o_j \tag{10}$$

$$T_{ij}(r_i)=k_{ij}\times r_i=r_j \tag{11}$$

也就是说：变换 T_{ij} 要将基准域 N_i 的球心 o_i 平移 c_{ij} 到 o_j，同时还要将半径 r_i 扩大 k_{ij} 倍到 r_j.

显然，变换 T_{ij} 可扩充到基准域 N_i 和 N_j 是 n 维拓扑域和微分流形的情况.

3.3 模糊集与 λ 基准变换 T_λ

下面的讨论告诉我们，模糊集可用基准变换生成和表示.

定义 7 设基准域 $N_i(o_i,r_i)=A_1=\{x|\mu_A(x)=1\}$，是模糊集 A 的核，$A_\lambda=\{x|\mu_A(x)\geqslant\lambda,\lambda\in[0,1]\}$ 是 A 的 λ 截集. 称 T_λ 是以 $N_i(o_i,r_i)$ 为核的模糊集 A 的 λ 基准变换，如它满足：

$$T_\lambda(N_i)=A_\lambda \tag{12}$$

定理 9 若基准域 $N_i(o_i,r_i)$ 是模糊集 A 的核，且 A_λ 具有 $N_\lambda(o_i,r_\lambda)$ 的形式，则其 λ 基准变换可用一个满足下式(5)的拓扑变换 T_λ 来实现：（如图 6 所示）

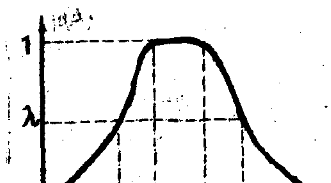


图 6 模糊 T_λ 变换示意图

Fig. 6 Sketch graph of fuzziness T_λ variation

$$\begin{aligned}T_\lambda(N_i)&=N(T_\lambda(o_i),T_\lambda(r_i)\\&=N_\lambda(o_i,r_\lambda)=A_\lambda\end{aligned} \tag{13}$$

即使：$T_\lambda(o_i)=o_i$；和 $T_\lambda(r_i)=k_{i\lambda}\times r_i=r_\lambda$.

且 $$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\cdot T_\lambda(N_i)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\cdot A_\lambda \tag{14}$$

这里，$\lambda\cdot A_\lambda$ 为数乘模糊集；$\mu_{(\lambda\cdot A_\lambda)}(x)=\lambda\wedge\chi_{A\lambda}(x)$[13].

证明：显然的.

这就是说，模糊集 A 是可由其核的所有 λ 基准变换 $T_\lambda(N_i)$ 生成的.

定义 8 设 A 和 B 分别是以基准域 $N_i(o_i,r_i)$ 和 $N_a(o_a,r_a)$ 为核的两个模糊集，称 T_a 为从 $N_i(o_i,r_i)$ 到 $N_a(o_a,r_a)$ 的基准变换，如果它满足：

$$T_a(N_i)=N(T_a(o_i),T_a(r_i))=N_a(o_a,r_a) \tag{15}$$

定义 9 称基准变换 $T_{a\lambda}$ 为 T_a 和 λ- 基准变换 T_λ 的复合变换，如果它满足：

$$\begin{aligned}T_{a\cdot\lambda}(N_i)&=T_\lambda\cdot T_a(N_i)\\&=T_\lambda(N_a)=N_\lambda(o_a,r_\lambda)\end{aligned} \tag{16}$$

由定义 7,8,9 和定理 9 立即可得下述定理：

定理 10 从模糊集 A 的核 N_i 出发，经复合基准变换 $T_{a\cdot\lambda}=T_\lambda\cdot T_a$，可得以 N_a 为核的模糊集 B 的 λ 截集 $B_\lambda=N_\lambda(o_a,r_\lambda)=\{x|\mu_B(x)\geqslant\lambda\}$.

定理 9 和定理 10 是说，模糊集可用 λ 基准变换 T_λ、T_a 和 $T_{a\cdot\lambda}$ 等不模糊的基准变换生成和表示.

限于篇幅，其它（更复杂）类型基准变换的性质坐标表示法，就不再一一介绍了. 下面我们以高考招生的性质坐标分析法为例，说明人类经验性决策过程中的各种基准变换都是可在性质坐标系中表示和刻划的.

4 经验决策中的基准变换及其性质坐标表示

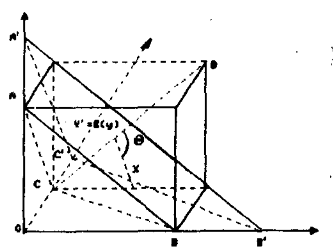


图 7 招生分析示意

Fig. 7 Sketch graph of analysis for admission of new students

图 7 是高考招生中人们按总分分档后，招生者凭自身经验知识和对成绩的感觉进行评判并挑选考生的数学分析示意简图（三维）[9,14,15]. △ABC 和△A′B′C′分别代表三门课 A，B，C 的总分为 100 和 110 分的等值（超）平面，也是该档次的下、上限. 一般招生者 y 总是以满分点 $D=D(100,100,100)$ 为最理想标准 $c(y)$，但在远离满分点的低档次中，其标准 $c(y)$ 将与 y 对各考试科目的心理权重（或偏向性）有关. 如 $\triangle ABC$ 中三位成绩分别为 $x_1=(50,30,20)$，$x_2=(30,20,50)$ 和 $x_3=(20,50,30)$ 的考生，就会分别被专业各为 A,C,B 的三位招生者录取. 基于专业要求

和经验的这种心理权重分配可用心理重心 $y' = (\alpha, \beta, \gamma), \alpha+\beta+\gamma=1$ 来表示．由于 $\triangle ABC$ 是一个二维单纯形重心坐标系，故 y' 可直接置入 $\triangle ABC$ 中．且 y 恰和笛卡儿坐标中点 $y = 100 \times y' = 100 \times (\alpha, \beta, \gamma)$ 重合，故不妨用它作为 y 在 $\triangle ABC$ 中的标准点 $c(y)$. 连接 y 和满分点 D 得 Dy 和 $\triangle A'B'C'$ 的交点 $E(y)$. 用 $E(y)$ 表示招生者 y 在该档次内的标准点 $c(y)$，则它既反映了 y 以专业和经验(或心理重心)为依据的原则，又反映了随档次上升，标准 $c(y)$ 逐渐趋近于D的特点. 有了y在该档次内的标准点$E(y)$，并简记为y，则学生成绩点x与y的距离$r(x,y)$就可表示 x 与 y 的心理标准$c(y)$间的距离，并可设y的满意度函数为：

$$s(x,y) = \frac{\lambda(x,y)}{r^{\tau}(x,y)} \tag{17}$$

这里 $\lambda(x,y)$ 和 $\tau = \tau(x,y)$ 分别是待定系数和幂指数.

考虑到满意度函数应该有：当 $r(x,y) = 0$ 时，$s(x,y) = 1$；而当 $r(x,y) = \infty$ 时，$s(x,y) = 0$的特征，故可设 $s(x,y)$ 为一 Gauss 函数：

$$s(x,y) = \lambda(x,y) \exp \left[\frac{-r(x,y)}{\sigma(x,y)}\right]^2 \tag{18}$$

这里，$\sigma(x,y)$ 是 Gauss 函数的方差项，为了更好地反映满意度函数在基准域附近的特征，我们给出下述表达式：

$$s(x,y) = \lambda(x,y) \exp \left[\frac{-r(x,y)}{\sigma(x,y)^{-u}}\right]_{\mu}^{2} \cos(\theta-\theta_0) \tag{19}$$

这里$\mu = \triangle L_i - \triangle X$，$\triangle X$是学生$X_i$的总分$\Sigma x_{ik}$和招生者$y_j$的标准点的总分$\Sigma y_{jk}$之差．$\triangle L_i(x)$为档次上下限之差．$\theta$是$r(x,y)$与标准线$Dy$间的夹角.

显然，对对象 x 所处的任一档次 L_i，y 不仅有一相应的标准点 $c(y, L_i)$，而且还存在着两个与 y 的感觉阈限 η 有关的特征阀值 $s_1(\eta(y), L_i)$ 和 $s_2(\eta(y), L_i)$，分别称为 y 的录取阀和淘汰阀，它们把所有考生分为三类，即录取类，淘汰类和待定类．

设有考生 m 名，招生者 n 名，则可得相应的感觉满意度矩阵：

$$S = S(s_{ij}) = (s(x_i, y_j)) \tag{20}$$

它的第 j 列 $S_j = (s_{ij}, \cdots, s_{mj})^T$ 和相应的特征阀 $s_1(\eta(y), L_i)$ 和 $s_2(\eta(y), L_i)$ 将确定出一个反映招生者 y_i感觉程度的序向量$O_j = (o_{1j}, \cdots, o_{mj})$和相应的决策方案$D_j = (d_{1j}, \cdots, d_{mj})$. $d_{ij} \in [0,1]$分别表示 x_i 被 y_j 录取，淘汰或待定度大小的值．

计算机检验结果表明：机器模拟的录取(参考)方案和预期结果吻合相当好，并能对一系列基准变换及其感知变化效应给出定量与定性相结合的数学解释[9,14,15]. 例如：

(1) 随招生者专业的不同，各自的要求或评判基准也不同，他们对同一考生的评价及满意度也各不相同；(这种情况可解释所谓仁者见仁，智者见智的现象).

(2) 随对象信息(如档案信息)的增减，人们的评判基准(域)会在维数不同的性质坐标空间中跃迁，故其满意度可以大相径庭；(这种情况可解释决策的非单调性).

(3) 随档次高低之变换，人们评判基准(域)会在性质坐标系中上下跃迁，其感知函数与满意度变化会呈现出某种相似结构规律，或分形结构规律；(这可解释"得陇还望蜀，无鱼虾也贵"的效应)

(4) 随特征阀值 $s_1(\eta(y), L_i)$ 和 $s_2(\eta(y), L_i)$ 的连续变化，评价和满意度函数出现模糊效应.

总之，由于性质坐标系能够表示经验性判据的变化过程，所以，它能较好的反映人们凭经验和感觉所进行的判断和决策思维过程.

此外，如果将已知招生者的心理重心和评判基准，求他会招什么人的问题作为原问题的话，那么，从已招的考生中求招生者的心理重心和评判基准及其变化过程的问题，就是原问题的逆问题. 我们曾为该逆问题设计了几个算法[16]，其中最简单、最粗糙的算法其形式与通常神经网络学习算法几乎是一样的. 这种情况告诉我们，性质坐标分析法的确是一个能将符号表示和神经网络表示结合起来的数学表示方法.

致谢

作者感谢戴汝为，李未，李国杰，史忠植，汪培庄，祝明发，董占球，李德华，汪云九，白硕，朱梧贾和刘永昌等专家和教授的大力帮助和指教.

参考文献

1 黄希庭. 心理学导论. 北京：人民教育出版社，1991，255～303.

2 王 浩. 数理逻辑通俗讲话. 北京：科学出版社，1981，4.

3 冯嘉礼. 判断基准的可变性与判断逻辑. 广西师范大学学报，1994，(1)：27～36.

4 冯嘉礼，柳继峰. 量子力学具有模糊性吗？见：何祚庥，侯德彭主编. 量子力学的丰碑--德布罗意 100 周年诞辰. 桂林：广西师范大学出版社，1994，179～190.

5 戴汝为. 基于人工神经网络的语义、句法模式识别. 见：智能计算机基础研究 '94. 北京：清华大学出版社，1994，1～5.

(下转第 22 页 Continue on page 22)

由 $\int_{t_3}^{\infty} t^{(n-k-1)} g^{k\alpha}(t) g(t) \mathrm{d}t$

$$\leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha}\int_{t_3}^{\infty} t^{n-k-1} p(t) f(y(g(t)) + R(g(t)) F^{-\alpha}(t) \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha}\int_{t_3}^{\infty} F^{-\alpha}(t)\mathrm{d}F(t)$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha(1-\alpha)} F^{1-\alpha}(t_3) < \infty$$

与定理 1 知，$A_k \neq \Phi$.

定理 2 当 n 为偶数时，(1) 存在正解的充要条件是

$$\int^{\infty} t^{n-k-1} p(t) g^{k\alpha}(t) \mathrm{d}t < \infty.$$

证： 当 n 为偶数时，$B_0 = \Phi$. 事实上，若有 $x_0 \in B_0$，则 $y_0(t) = x_0(t) - R(t)$ 为 (2) 的正解且 $\lim\limits_{t\to\infty} y_0(t) = 0$. 但 $y_0^{(n)}(t) < 0$ 对充分大的 t 成立. 由 Kпaypпзе 引理，$y'(t) > 0$，从而 $y(t)$ 单调递增. 这与 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ 矛盾.

因此，$P = A \cup (\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} B_k)$. 由引理 5，$P \neq \Phi$ 的充要条件是 $A \neq \Phi$，由定理 1 即可知结论成立.

当 $r(t) \equiv 0$，$g(t) = t - \tau(t)$，$\tau(t) \in C(R, R_+)$ 且有界时，本文结论均成立. 因而无强迫项与有界滞量的情形是本文的特例.

参考文献

1 Suano T, Naito M. Positive solutions of a class of nonlinear ordinary differential equation. Nonlinear analysis, 1988, 12 (9).

2 Kusano T, Singh B. Positive solutions of functional differential equations with singlar nonlinear terms. Nonlinear analysis, 1984, 8 (9).

3 Madfoud W E. Oscillation and asymptotic behavior of nth order nonlinear delay differential equations. J Diff Equs, 1977, (24).

4 燕居让. n 阶非线性时滞微分方程的振动性与渐近性. 数学学报, 1990, 33 (4) .

5 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科技出版社, 1989, 406~416.

(责任编辑：蒋汉明)

(上接第13页 Continue from page 13)

6 邵学思. 神经科学的近代发展及其对因果观念的挑战. 自然杂志, 1993, (6): 14~19.

7 汪云九. 认知科学的某些计算理论. 科学, 1993, 44 (4): 9~14.

8 冯嘉礼, 王维智. 记忆结构与性质集结构. 桂林: 广西师范大学学报, 1994, (3): 1~7.

9 冯嘉礼. 思维与智能科学中的性质论方法. 北京: 原子能出版社, 1990.

10 冯嘉礼等. 以属性为基础的知识库建库原则. 计算机研究与发展, 1987, 24 (11): 55~61.

11 江泽涵. 拓扑学引论. 北京: 科学出版社, 1979.

12 陈意云. 计算机科学中的范畴论. 合肥: 中国科技大学出版社, 1993, 79~81.

13 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海: 上海科技出版社, 1983, 14~16.

14 冯嘉礼. 感知与思维的性质坐标分析法. 见: 戴汝为, 史忠植主编. 人工智能和智能计算机. 北京: 电子工业出版社, 1991, 113~118.

15 冯嘉礼. 基于性质坐标系的一种非单调推理与决策. 大自然探索, 1990, 9 (4): 87~93.

16 冯嘉礼. 一种会学习的感知决策机模型. 桂林: 广西师范大学学报, 1992, (1): 1~6.

(责任编辑：蒋汉明　梁积全)