

高层建筑结构分析的 QR 法*

QR Method for Structural Analysis of Tall Building

秦 荣

Qin Rong

(广西大学 南宁市西乡塘路 10 号 530004)

(Guangxi University, 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 介绍高层建筑结构分析的 QR 法。利用 QR 法分析高层建筑结构比有限元法及有限条法都先进, 不仅未知量的数目很少, 精度高, 而且输入简单, 计算速度快, 可以用微机分析复杂问题。

关键词 高层建筑结构 QR 法 结构分析

Abstract QR method for structural analysis of tall building is put forward. It is more better in comparison with finite element method and finite spline method in the structural analysis of tall building, and with less unknown quantity, high degree of accuracy, input simple and computing quick. It can solve complex matter with microcomputer.

Key words tall building structures, QR method, structural analysis

目前, 结构分析的主要方法是有限元法及有限条法。有限元法是解决力学问题的有力工具, 为解决工程中的力学问题开创了一个崭新的局面。但在实践中, 有限元法也逐步暴露了自身难以克服的一些缺点, 最突出的是所解问题复杂性与经费、计算机能力有限之间发生很大的矛盾。例如, 对于三维、复合、动态、耦合、波动、无限域、非线性等领域, 用有限元解题所需单元、内存及计算工作量十分惊人, 需要大型计算机运作, 计算费用昂贵。有限的经费及计算机条件, 往往造成有限元解题在工程应用上难以实现, 甚至不可能实现。有限条法的未知量的数目比有限元法大大减少, 但适应性不太强, 例如, 对于开洞不规则的剪力墙及复杂框架难以适用。显然需要另外开创一些经济有效的新方法。本文作者提出了一个 QR 法^[1], 这个方法集有限元法、有限条法及样条有限点法的优点于一身, 克服了有限元法及有限条法的缺点。因此, QR 法未知量的数目很少, 程序简单, 输入数据很少, 剪度高, 适应性强, 能适用于各种不规则的结构, 用微机能分析大型的复杂结构, 计算费用很少, 是一个经济有效的新方法。

1 位移函数

图 1 是一个框剪结构, 它的位移函数为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\phi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\phi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \\ \theta &= \sum_{m=1}^r [\phi(x)] \{\theta\}_m Z_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} \{u\}_m &= [u_0 \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T \\ \{v\}_m &= [v_0 \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T \\ \{\theta\}_m &= [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]^T \\ \{\phi\} &= [\phi_0 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N]^T \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(x)$ 为基函数, 可以用任意分划的一次或三次 B 样条函数或任意函数构成, 也可以用拉格朗日插值函数构成, 满足下列条件:

$$\phi_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2)$$

X_m, Y_m 及 Z_m 为正交多项式或正交函数^[2,3]。式(1)适用于任意分划的情况。如果 $\phi_i(x_k)$ 满足式(2)所示的条件, 则式(1)可自动变为

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^r u_{im} X_m(y) & v_i &= \sum_{m=1}^r v_{im} Y_m(y) \\ \theta_i &= \sum_{m=1}^r \theta_{im} Z_m(y) & i &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

式中 u, v, θ 为 $x = x_i$ 处的位移函数; u_{im}, v_{im} 及 θ_{im}

Guangxi Sciences, Vol. 1 No. 4, November 1994

1994-08-09 收稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

为待定参数。由上述可知,式(3)是式(1)的一种特殊形式,而且包含在式(1)之中,对不均匀分划的情况都适用。由式(3)可得:

$$\{V\}_i = [N]_i \{\delta\} \quad (4)$$

式中 $\{V\}_i = [u_i, v_i, \theta_i]^T$

$$[N]_i = \text{diag}(0, \dots, [N^*]_i, 0, \dots) \quad (5)$$

$$[N^*]_i = [[N]_1, [N]_2 \dots [N]_r]$$

$$\{\delta\} = [\{\delta\}_1^T, \{\delta\}_2^T \dots \{\delta\}_N^T]^T$$

$$\{\delta\}_i = [\{\delta\}_1^T, \{\delta\}_2^T \dots \{\delta\}_N^T]^T$$

其中 $[N]_m = \text{diag}(X_m, Y_m, Z_m)$

$$\{\delta\}_m = [u_{im}, v_{im}, \theta_{im}]^T$$

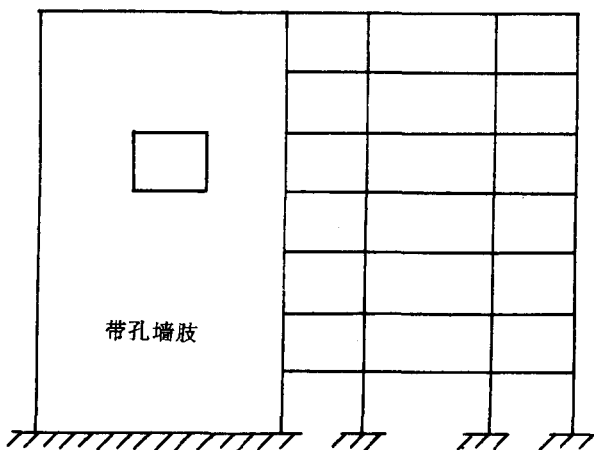


图1 带孔框剪结构

Fig.1 Frame-shear wall with holl

2 QR法

如果将结构分为若干单元(图2),则结构中任一

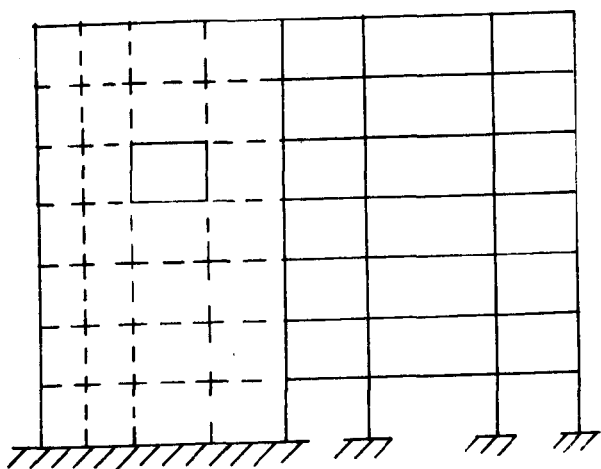


图2 框剪结构非均匀离散化

Fig.2 Non-uniform discretization of frame-shear wall

单元的总势能泛函为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{V\}_e^T [k]_e \{V\}_e - \{V\}_e^T \{f\}_e \quad (6)$$

式中 $[k]_e$ 及 $\{f\}_e$ 分别为单元的刚度矩阵及荷载向量,

广西科学 1994年11月 第1卷第4期

$\{V\}_e$ 为单元上的结点位移向量,它满足下列关系:

$$\{V\}_e = [N]_e \{\delta\} \quad (7)$$

对于杆单元(图3),则

$$\{V\}_e = \left[\begin{array}{l} \{V\}_A^T \{V\}_B^T \end{array} \right]^T \\ [N]_e = \left[\begin{array}{l} [N]_A^T [N]_B^T \end{array} \right]^T \quad (8)$$

对于三结点三角形单元(图4),则



图3 梁单元

Fig.3 Beam element

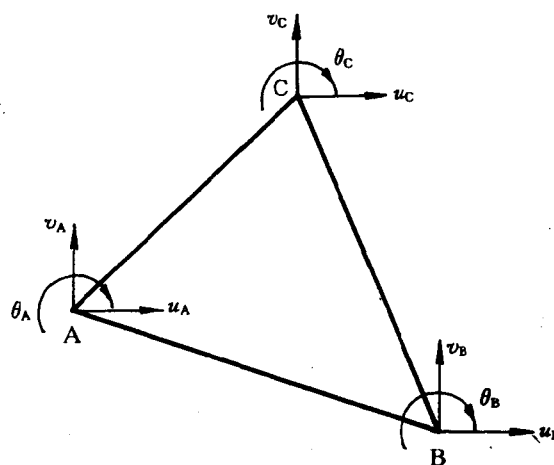


图4 三角形单元

Fig.4 Triangular element

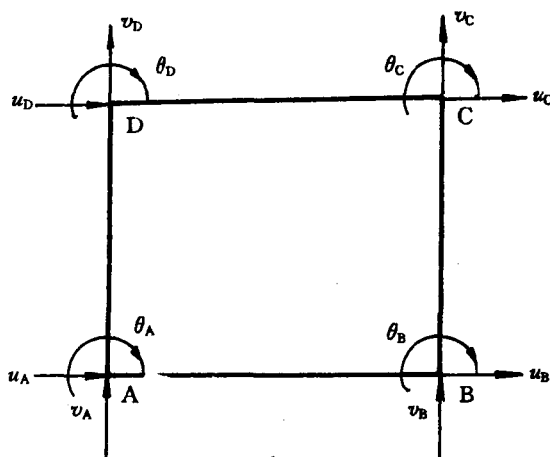


图5 矩形单元

Fig.5 Retriangular element

$$\{V\}_e = \left[\begin{array}{l} \{V\}_A^T \{V\}_B^T \{V\}_C^T \end{array} \right]^T \\ [N]_e = \left[\begin{array}{l} [N]_A^T [N]_B^T [N]_C^T \end{array} \right]^T \quad (9)$$

对于四结点矩形单元(图5),则

$$\left. \begin{aligned} \{V\}_e &= [\{V\}_A^T \{V\}_B^T \{V\}_C^T \{V\}_D^T]^T \\ [N]_e &= [[N]_A^T [N]_B^T [N]_C^T [N]_D^T]^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $[N]_A$ 为 $[N]$ 在A点的矩阵,由式(5)确定。将式(7)代入式(6)可得:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [G]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}^T \{f_N\}_e \quad (11)$$

式中 $[G]_e = [N]_e^T [k]_e [N]_e$

$$\{f_N\}_e = [N]_e^T \{f\}_e \quad (12)$$

整个结构的总势能泛函为

$$\Pi = \sum_{e=1}^M \Pi_e \quad (13)$$

由此可得:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [G] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{f\} \quad (14)$$

$$\text{式中 } [G] = \sum_{e=1}^M [G]_e, \quad \{f\} = \sum_{e=1}^M \{f_N\}_e \quad (15)$$

由式(15)可知,本法建立结构刚度矩阵非常方便,可以利用式(15)直接相加,不需要先扩张后叠加。利用变分原理可得结构的刚度方程:

$$[G] \{\delta\} = \{f\} \quad (16)$$

式中 $[G]$ 及 $\{f\}$ 分别为结构的刚度矩阵及荷载向量。

利用式(16)求出 $\{\delta\}$ 后,即可由相应的公式求出结构的内力及位移。我们将上述方法称为QR法。这个方法是本文作者Qin Rong创立的。由上述推导过程可知,虽然结构按有限元网格划分,但由于引用了某种函数加以转化,因此,结构刚度方程中的未知量的数目与单元多少无关,只与选定的少数点及 r 有关,故结构刚度方程中的未知量的数目很少。例如,对于4跨100层的平面框架,用有限元法分析时,未知量有1515个,用QR法分析时可以降到15个,计算非常方便。

3 动力分析

3.1 结构动力方程

对于结构的动力问题,外力、位移及内力都是时间的函数,单元的总势能泛函可写成下列形式:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} \{V\}_e^T [k]_e \{V\}_e \\ &\quad - \{V\}_e^T (\{f\}_e - [c]_e \{\dot{V}\}_e - [m]_e \{\ddot{V}\}_e) \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $[m]_e$ 为单元质量矩阵, $[c]_e$ 为单元阻尼矩阵。将式(7)代入式(17)可得:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [G]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}^T (\{f_N\}_e \\ &\quad - [C]_e \{\dot{\delta}\}_e - [M]_e \{\ddot{\delta}\}_e) \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $[M]_e = [N]_e^T [m]_e [N]_e$

$$[C]_e = [N]_e^T [c]_e [N]_e \quad (19)$$

对于整个结构,将式(18)代入式(13)可得:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [G] \{\delta\} - \{\delta\}^T (\{f\} - [C] \{\dot{\delta}\} \\ &\quad - [M] \{\ddot{\delta}\}) \end{aligned} \quad (20)$$

利用变分原理可得结构动力方程:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [G] \{\delta\} = \{f\} \quad (21)$$

$$\text{式中 } [M] = \sum_{e=1}^M [M]_e, \quad [C] = \sum_{e=1}^M [C]_e \quad (22)$$

结构阻尼矩阵一般采用下列形式:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [G] \quad (23)$$

式中 α 及 β 由文献[1]确定。 $[M]$, $[C]$ 及 $[G]$ 分别为结构的质量矩阵,阻尼矩阵及刚度矩阵。

3.2 结构自振特征

如果结构只有自由振动,且不考虑阻尼,则式(21)可变为下列形式:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [G] \{\delta\} = \{0\} \quad (24)$$

$$\text{设 } \{\delta\} = \{\delta^*\} \sin(\omega t + \alpha) \quad (25)$$

则式(24)可变为

$$([G] - \omega^2 [M]) \{\delta^*\} = \{0\} \quad (26)$$

由上式可得

$$[G] \{\delta^*\} = \lambda [M] \{\delta^*\} \quad (27)$$

式中 λ 称为特征值。因此求解结构自振特性的问题可归结为求解广义特征值问题。

3.3 结构地震动力响应

发生地震时,结构的动力方程可写成下列形式:

$$[M] \{\ddot{\delta}_e\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [G] \{\delta\} = \{f\} \quad (28)$$

式中 $\{\delta_e\}$ 为结构绝对加速度,即

$$\{\delta_e\} = \{\delta_g\} + \{\delta\} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)可得:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [G] \{\delta\} = \{P\} \quad (30)$$

$$\text{式中 } \{P\} = \{f\} - [M] \{\ddot{\delta}_g\} \quad (31)$$

其中 $\{\delta_g\}$ 为地面加速度。如果只考虑地震对结构产生的动力响应,则 $\{f\} = \{0\}$, $\{P\} = -[M] \{\ddot{\delta}_g\}$ 。

对式(30)所示结构动力方程的求解,可采用秦

荣提出的样条加权残数法^[2~5]。这种方法计算很方便。

4 稳定分析

结构的稳定方程可写成下列形式：

$$([G] - \lambda[H])\{\delta\} = \{0\} \quad (32)$$

式中 $\lambda = P$, $[H]$ 为结构的几何刚度矩, 由下列公式确定：

$$[H] = \sum_{e=1}^M [H]_e = \sum_{e=1}^M [N]_e^T [S]_e [N]_e \quad (33)$$

其中 $[S]_e$ 为单元的几何刚度矩阵^[6]。

式(32)是一个齐次方程组。由于 $\{\delta\} \neq \{0\}$, 因此式(32)圆括号内矩阵的行列式必须等于零, 即

$$|[G] - \lambda[H]| = 0 \quad (34)$$

这是结构稳定性的特征方程。由此可以求出一组特征值, 从而可求出结构的临界荷载。工程上感兴趣是求结构失稳的最小荷载, 把它作为判断结构稳定性的标准。因此, 工程上只要求一个最小的特征值。

对于未知数很多的问题, 直接由式(34)求解特征值是很困难的, 通常采用迭代法求解式(32)^[2]。

5 计算例题

对上述 QR 法我们用 Fortran 77 语言编制了程序, 并且在 IBM-PC/Xt 及 Compa Q-386 微机上实现, 算过许多实例, 包括结构的静力分析, 动力分析, 稳定分析, 几何非线性分析, 材料非线性分析及结构与地基基础的相互作用问题, 本文只列出几个实例。

表 1 Table 1

层次 Layer	水平位移 (cm)		第一跨梁的内力 Internal forces of first span beams					
	Horizontal displacements		Q (kN)		M _左 (kN-m)		M _右 (kN-m)	
	QRM	FEM	QRM	FEM	QRM	FEM	QRM	FEM
1	0.0234	0.0335	16.98	16.71	82.14	81.5	35.94	35.47
2	0.121	0.117	26.48	26.33	130.54	129.76	54.51	54.54
3	0.246	0.232	30.84	30.73	154.12	153.25	61.64	61.31
4	0.376	0.362	31.71	31.61	160.37	159.69	61.26	61.50
5	0.512	0.498	30.29	30.19	155.27	154.83	56.21	56.46
6	0.651	0.632	27.53	27.03	144.16	143.10	48.47	48.76
7	0.781	0.760	24.21	24.41	129.12	128.14	39.95	40.06
8	0.902	0.880	20.96	20.73	114.25	113.23	31.84	31.87
9	1.010	0.993	18.42	18.19	102.23	101.61	25.47	25.69
10	1.121	1.100	8.61	8.58	48.54	48.47	11.52	11.65

QRM: QR 法 QR method; FEM: 有限元法 Finite element method.

例 1 图 6 是一个 3 跨 10 层框剪结构, 受水平平均布荷载作用。已知 $q = 10 \text{ kN/m}$, 混凝土标号为 300 号, 墙厚为 0.3 m, 柱截面为 0.3 m × 0.4 m, 梁截面顶层为 0.3 m × 0.79 m, 其余各层为 0.3 m × 1.0 m。利用 QR 法算出的结果见表 1。由表 1 可知, 利用 QR 法分析高层建筑结构的结果与有限元法的结果相差不多, 但计算简便得很多。

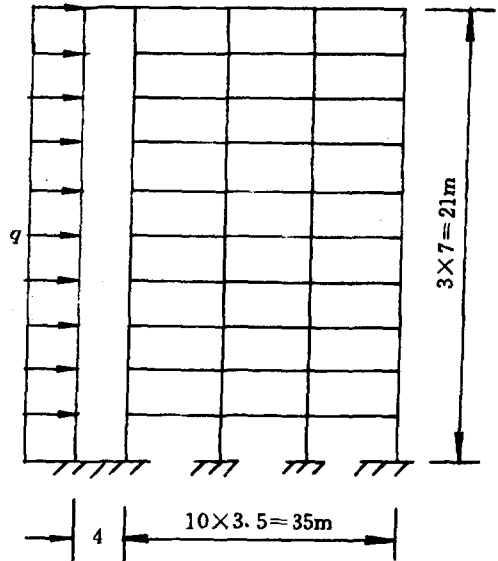


图 6 Fig. 6

例 2 对于图 6 所示框剪结构, 如果顶层质量为 $5 \text{ t-s}^2/\text{m}$, 其余各层质量为 $10 \text{ t-s}^2/\text{m}$, 利用 QR 法对它进行地震响应分析。本例采用天津波, 计算结果见图 7。由图可知, QR 法算出的结果与有限元法算出的结果相差不多。

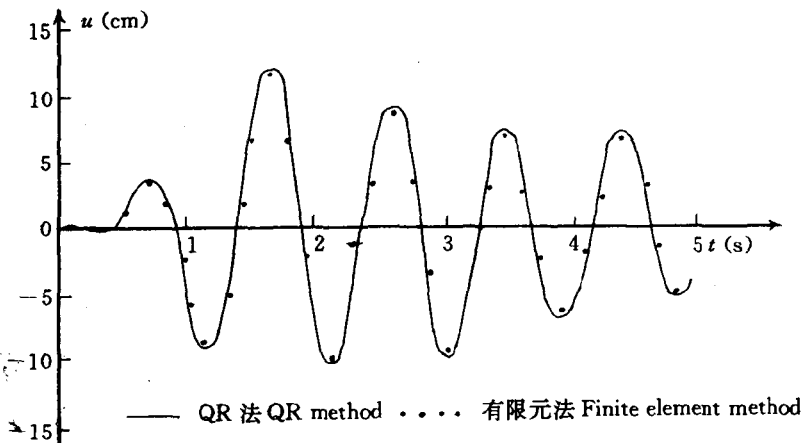


图7 顶层位移反应

Fig. 7 Displacement reaction of top layer

例3 图8为2跨10层框架,已知 $E = 1, A_b = A_c = 1, I_b = I_c = 0.0834, a = 20, b = 10$ 。如果顶层中间结点受竖向荷载 $2P$, 两边结点各受竖向荷载 P , 其他各层中间结点受竖向荷载 $4P$, 两边结点各受竖向荷载 $2P$, 利用QR法分析本例的稳定性。

本例的计算结果见表2。由表2可知, 利用QR法算出的结果与有限元法算出的结果相差很小, 但计算与有限元法简便得很多。

表2 Table 2

分析方法 Method	临界荷载因子 Critical load factor	自由度 Degree of freedom	误差 Error (%)
FEM	$0.1289 \times 10^{-3}/P$	99	
QRM $r=3$	$0.129533 \times 10^{-3}/P$	27	0.49
QRM $r=4$	$0.129206 \times 10^{-3}/P$	36	0.237
QRM $r=5$	$0.128902 \times 10^{-3}/P$	45	0.0012

FEM: 有限元法 Finite element method; QRM: QR法 QR method.

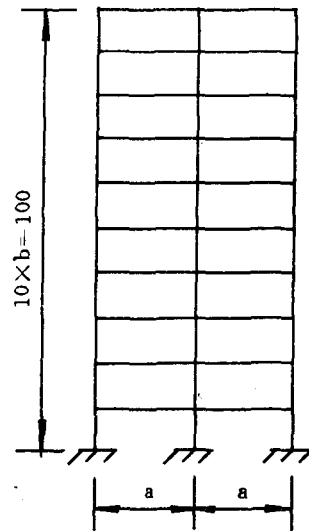


图8 Fig. 8

6 结语

QR法对任意复杂的结构都适用, 包括非规则框架, 复杂框架, 任意开洞的剪力墙, 框筒, 筒中筒, 任意空间结构及岩土工程等; 对工程中的静力分析、动力分析、稳定性分析、几何非线性分析、材料非线性分析及结构与介质相互作用问题都适用; 比有限元法及有限条法优越得多; 程度简单, 输入数据极少, 不仅计算简便, 而且精度高, 可以用微机分析复杂的高层建筑结构及工程中的力学问题。

参考文献

- 1 秦荣. 高层框架分析的新方法. 工程力学, 1988, 2 (5).
- 2 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 南宁: 广西人民出版社, 1985.
- 3 秦荣. 求结构动力响应的样条函数方法. 工程力学, 1985, 2 (2).
- 4 秦荣. 无条件稳定的动态样条加权残数法. 工程力学, 1990, 1 (7).
- 5 秦荣. 用QR法和样条加权残数法求解高层框剪结构的地震反应. 工程力学, 1993, 2 (10).
- 6 秦荣. 钢筋混凝土结构非线性分析的新方法. 工程力学, 1993, 增刊.

(责任编辑: 蒋汉明)