

# 非线性系统失稳控制与目标瞄准

## The Unstable Controlling and Targeting Object of Nonlinear System

陈光旨      刘宗华      覃团发      许爱国      肖长明  
Cheng Guangzhi      Liu Zhonghua      Qin Tuanfa      Xu Aiguo      Xiao Changming

(广西大学物理系 南宁市西乡塘路 530004)

(Department of Physics, Guangxi University, Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

倪皖苏

Ni Wansun

(南京大学电子系 江苏省南京市 210008)

(Department of electronics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu, 210008)

**摘要** 综述非线性系统失稳控制与目标瞄准的一般方法,指出各种方法的优缺点及研究非线性系统的发展方向.

**关键词** 失稳周期轨道 混沌控制 目标瞄准

**Abstract** This article describes the general method of unstable control and targeting object of nonlinear systems, and points out the advantage and disadvantage of the methods and the developing direction of nonlinear system.

**Key words** Unstable periodic orbit, Controlling chaos, Targeting object

## 1 引言

混沌是一种普遍存在的现象,不仅随机系统中出现混沌,而且确定论系统中也能出现混沌.但由于混沌运动的不可预言性及无规性,长期以来人们一直认为它是一种有害的现象,可是近年来人们发现可以利用其对初值点的敏感依赖性及其在状态空间中的各态历经性来达到我们所希望的目的,即按我们要求的轨道运动,而不希望的状态则不出现,这就是混沌控制与瞄准的任务.混沌系统控制的一般问题非常普遍,能技术性解决其它领域的重要问题.在通讯中,混沌涨落可用于发送控制、前计划信号;在生理学中,混沌控制可用于心脏及神经信息处理过程;在流体力学中,混沌对流可被控制;在化学中,能控制自催化反应中的混沌;还有混沌激光控制,混沌二极管电路控制等等.目前能实现混沌瞄准与控制的方法非常多,其中尤以 E. Ott, C. Grebogi 与 J. A. Yorke (O. G. Y) 的方法能用于实验而使这个领域的研究工作迅速热门起来.下面介绍几种主要的方法.

## 2 控制混沌的方法

### 2.1 O. G. Y 方法

此方法为 O. G. Y<sup>[1]</sup>于 1990 年提出,也叫参数微扰调节法,它是通过参数的微小改变来实现混沌区中失稳周期轨道的控制与瞄准.对稳定周期轨道,因其 Lyapunov 指数小于 1 (对迭代方程) 或小于 0 (对微分方程),因而只需让其作自由运动便可稳定到该周期轨道.但对处处是鞍点的失稳周期轨道,其 Lyapunov 指数,将会大于 1 (对迭代方程) 或大于 0 (对微分方程),若让其作自由运动,便永远无法将其稳定到某一失稳周期轨道上.为了将其稳定下来,就必须改变其 Lyapunov 指数, O. G. Y 方法正是较好地做到了这一点.他们首先选择一嵌在混沌集中的不稳定周期轨道,按某些临界情况,此失稳周期轨道将导致系统最好的行为;其次沿着所希望的失稳周期轨道定义一个小区域,由于各态历经性,混沌轨道最终将落在这个小区域.当此情况发生时,选择小而合适的参数微扰来迫使轨道逼近失稳周期轨道.此法的优点就在于由于其参数的改变很少,并且达到目标后参数的改变为零,因而能够为实验所实现,而不仅仅是通过数字模拟在计算机上实现控制.其具体控制过程如

下:

假定描述系统的动力学方程未知,但一些标量时间序列  $Z_i$  可被测量,使用延迟坐标可得延迟坐标矢量

$$X(t) = [Z(t), Z(t - T), Z(t - 2T) \dots Z(t - MT)]$$

用  $X = \text{常数}$  可得截面,在截面上一个连续时间周期轨道简化为穿过一些特定点集的分立时间轨道圈.

对嵌入矢量  $X$ ,假定得到了截面  $P = 0$  的实验点  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , 这里  $Z_n$  代表轨道  $X(t)$  第  $n$  次穿过截面的点.用这种方法就能确定大量的分立失稳周期轨道(在混沌吸引子中),然后检测这些失稳周期轨道,并挑选出其中一个行为最好的.如果  $Z_n = Z_n(p_0) = 0$  为期待的固定点,则稍微改变  $p$  从  $p_0 = 0$  到某一其他值  $p = \delta p$ ,实验截面上固定点坐标将从  $0$  移动到某附近点  $Z_n(\delta p)$ .假定  $Z_n$  落在所期待的固定点  $Z_n = 0$  附近,则挑选  $P_n$  以便  $Z_{n+1}$  落在  $Z_n = 0$  的稳定流形上,如图 1<sup>[2]</sup>.

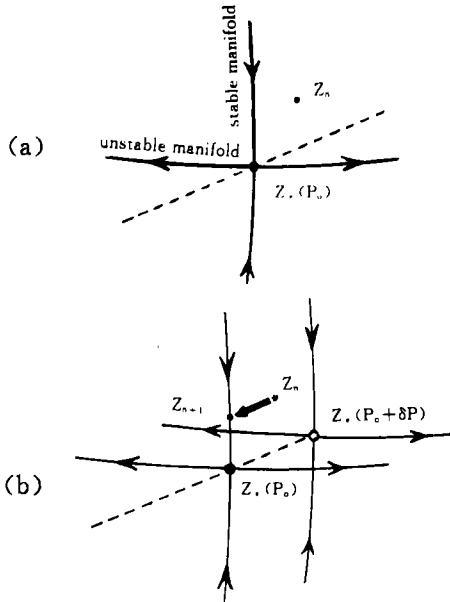


图 1 Fig. 1

如果  $Z_{n+1}$  落在  $Z_n = 0$  的稳定流形上,则令参数的微扰为零,随后的时间轨道将按几何速率  $\lambda_0$  逼近固定点.若需调节的参数值超过一定量  $P^*$  时,则停止使用微扰而进行等待,由于混沌的各态历经性,在某一时间,轨道必定会落在固定点附近,因此可实现控制.

将上述思想推广到  $n$  维系统<sup>[3]</sup>

$$Z_{i+1} = F(Z_i, P), Z_i \in R^n, P \in R$$

限制  $P$  为小范围  $|P - \bar{P}| < \delta$ .当  $P = \bar{P}$  时系统包含一个混沌吸引子,让  $Z_n(p)$  代表吸引子上的不稳定

固定点,对固定点邻域  $P$  中逼近  $P$  的点,映象可作线性化近似:

$$\begin{aligned} Z_{i+1} - Z_n(\bar{P}) &= A[Z_i - Z_n(\bar{P})] + B(P - \bar{P}) \end{aligned}$$

其中  $A = D_z F(Z, p)$  为  $n \times n$  Jacobian 矩阵,  $B = D_p F(Z, p)$  为  $n$  维列矢量.假定  $P$  为变量  $Z_i$  的线性函数:

$$P - \bar{P} = -K^T[Z_i - Z_n(\bar{P})]$$

其中  $K^T$  为  $1 \times n$  矩阵,  $K^T$  待定以使  $Z_n(\bar{P})$  点稳定化,故:

$$Z_{i+1} - Z_n(\bar{P}) = (A - BK^T)[Z_i - Z_n(\bar{P})]$$

如果  $A - BK^T$  的本征模均小于 1,则  $Z_n(\bar{P})$  便可被稳定化,确定  $K^T$  以使  $A - BK^T$  的本征模小于 1 的技术称为“极点定位技术 (pole placement technique)”,矩阵  $A - BK^T$  称为“调节棒”.

对周期数大于 1 的周期轨道,则当以其周期  $n$  作为一个迭代单位时,便简化为周期 1 的情形,余下的控制过程与上同.

高维控制的一个典型模型为 4 维双转子模型 (double motor)<sup>[4]</sup>,它是用来描述加在两个薄的、无质量的棒上的脉冲序列的效应,如图 2.

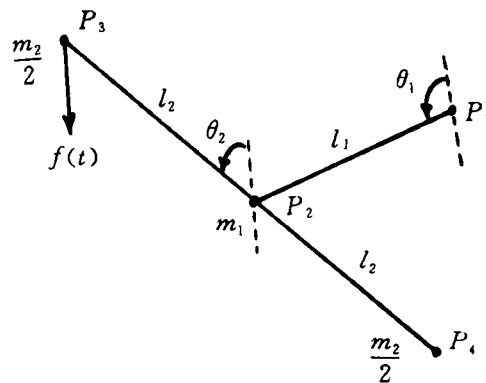


图 2 Fig. 2

第一棒的长度为  $l_1$ ,以  $P_1$  为轴旋转,此处的摩擦力使其按正比于  $\theta_1$  的速率减慢,第二棒的长度为  $2l_2$ ,以  $P_2$  轴旋转,  $P_2$  轴本身也移动,此处的摩擦力以速率  $(\theta_2 - \theta_1)$  减慢第二棒,同时自发地加速第一棒,  $P_3$  处周期性  $t = T, 2T, \dots$  地接收脉冲踢力,且总是同一方向,强度为  $\rho$ ,重力与空气阻力忽略,由此可得 4 维映象:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (M\theta_n + \theta_n) \bmod 2\pi \\ (L\theta_n + G(\theta_{n+1})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中  $\theta_n = \begin{pmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \end{pmatrix}, \theta_n = \begin{pmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \end{pmatrix}, G(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 \sin \theta_1 \\ C_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \theta_i^{(n)} = \theta_i(nT), \dot{\theta}_i^{(n)} = \dot{\theta}_i(nT), L, M$  为  $2 \times 2$  矩阵. 对此四维系统运用上述方法, 便能将系统控制到失稳周期点.

Lai Ying - Cheng 等<sup>[5]</sup> 将此方法用于 Hamiltonian 系统(保守系统), 比如标准映象

$$X_{n+1} = (X_n + Y_n) \bmod (2\pi) - \pi$$

$$Y_{n+1} = Y_n + p \sin(X_n + Y_n)$$

发现依然能实现失稳周期轨道的控制. 此时为找  $X$  点的稳定方向首先按映象  $F$  将此点向前迭代  $N$  步, 得到轨道  $F^1(X), F^2(X), \dots, F^N(X)$ , 如图 3.

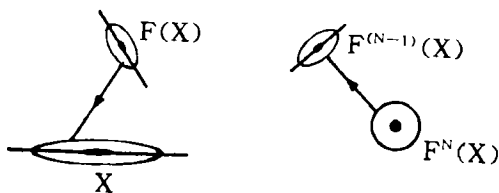


图 3 Fig. 3

假定我们放一任意小半径为  $\epsilon$  的圆在  $F^N(X)$  处, 将此圆向后迭代到  $F^{(N-1)}(X)$  并保持稳定方向的主轴  $\epsilon$  不变, 继续向后迭代且保持椭圆主轴  $\epsilon$  不变(当需不断归一化时), 当迭代到点  $X$  时, 椭圆会变得很瘦, 此时长主轴方向便是稳定流形方向. 寻找不稳定方向的方式与此类似, 只是迭代过程改为向前迭代, 如图 4.

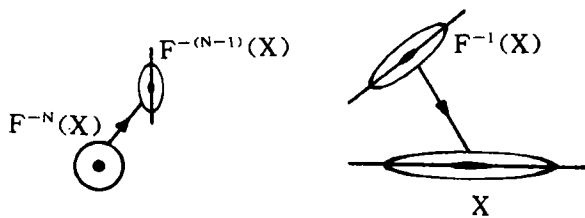


图 4 Fig. 4

倪皖荪等<sup>[6]</sup> 将此方法推广到了非各态历经的分岔区域. 在分岔区中, 除了稳定的周期轨道外, 依然充满着大量的失稳周期轨道, 只不过通常这些失稳轨道不出现, 而通过参数调节将系统的行为控制到这些失稳周期轨道上.

广西科学 1995 年 2 月 第 2 卷第 1 期

此外, B. A. Huberman 等<sup>[7]</sup> 和陈式刚等<sup>[8]</sup> 也用此法做了部分工作.

## 2.2 负反馈方法

此方法通过改变输入值从而达到改变输出值的目的. 与 O. G. Y 方法相比, 此法无需计算机限制, 且可实现时间连续控制从而能克服突发式大噪声. 若考虑常微分方程:

$$\dot{X} = F(X, t)$$

加上负反馈后上式成为:

$$\dot{X} = F(X, t) - U(X - X_T)$$

其中  $U$  为对角矩阵  $u_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $X_T$  为从混沌吸引子中提出的失稳周期轨道. 胡岗等<sup>[9]</sup> 的分析指出,  $U_i$  需满足一定的条件. 若将此方法推广到偏微分方程系统<sup>[10]</sup>, 比如由正弦波驱动的一维非线性漂移波方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{a \partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{c \partial \phi}{\partial X} + \frac{f \phi \partial \phi}{\partial X} = -\gamma \phi - \epsilon \sin(X - \Omega t)$$

通过注入单色波负反馈或锁注  $X$  空间的特定点便可实现控制. 胡岗等用此方法控制住了滞后效应中的不稳态, 即将中间失稳分支控制住了, 并可进一步推广到耦合格子映象的时间混沌控制<sup>[11]</sup>.

负反馈的另一种形式是系统加外力法<sup>[12]</sup>, 即根据控制的需要, 适当地辅以外力来调节(图 5). 如考虑

$$\dot{y} = P(y, x) + F(t)$$

$$\dot{x} = Q(y, x)$$

其中  $Y$  为输出变量,  $X$  为隐式变量,  $F(t)$  为外力信号. 当  $F(t)$  为零时, 系统具有奇怪吸引子, 如  $F(t)$  取如下形式

$$F(t) = k[y(t - \tau) - y(t)]$$

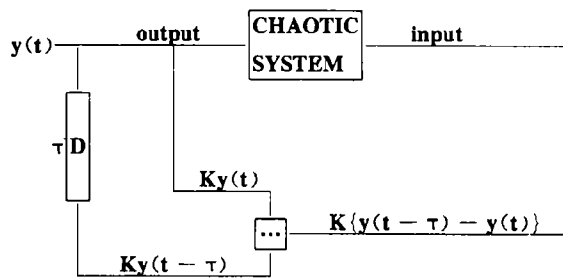


图 5 Fig. 5

其中  $k$  为实验可调权重,  $y(t - \tau)$  为延迟输出信号, 当稳定化取得时,  $F(t)$  就变得很小.

## 2.3 级数展开法

除了以上两种控制方法, 另一种控制方法为级数展开法. 此方法无需对系统的参数作改变, 也无需

在输入中引入负反馈,而是将系统的解做级数展开<sup>[13]</sup>,然后对级数中的频率参数作调节,从而达到控制混沌的目的,与O.G.Y法相比,此法无需等待,与负反馈法相比,此法的外加噪声将会减缩控制参数的变化范围,考虑Duffing方程

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = B_0 + B_1 \cos \Omega t$$

为确定各周期解的存在范围及边界条件,考虑近似解

$$x(t) = C_0 + C_1 \cos(\Omega t + \Psi)$$

为研究此近似解的稳定性,对其加一小变化量 $\delta X(t)$

$$x(t) = C_0 + C_1 \cos(\Omega t + \Psi) + \delta x(t)$$

作代数运算后,可知其最低级的失稳区域发生在 $\frac{\Omega}{2} = \sqrt{3C_0^2 + \frac{3C_1^2}{2}}$ ,在此边界处有

$$\delta X = b_{1/2} \cos\left(\frac{\Omega t}{2} + \Psi\right)$$

超过此边界,系统进入二周期解,其形式为

$$x(t) = A_0 + A_{1/2} \cos\left(\frac{\Omega t}{2} + \eta\right) + A_1 \cos \Omega t$$

为考查此解的稳定性,可再加一小变量 $\delta x(t)$ 到上式右边并代入原方程找出其失稳边界,发现在边界处 $\delta x$ 取如下形式

$$\delta x = b_{1/4} \cos\left(\frac{\Omega t}{4} + \eta\right) + b_{3/4} \cos\left(\frac{3\Omega t}{4} + \eta\right)$$

超过此边界,则进入周期4区域,如此下去,便可确定各级周期边界及混沌区域.级数展开法的关键在于根据此分析过程来改变频率参数 $\Omega$ 从而实现系统的控制.

### 3 非线性系统的瞄准

对非线性系统的研究,除了失稳周期轨道的控制外,另一任务就是对失稳周期点或任一点进行瞄准.在此我们介绍两种方法.

#### 3.1 S.O.G.Y 瞄准法

此方法也叫微扰瞄准法,为S.O.G.Y研究小组所使用.与O.G.Y控制混沌方法一样,该方法也是利用混沌轨道对微扰的敏感性,通过小的扰动来让混沌轨道作大的偏离,从而达到瞄准目标的目的.

考虑一维映象描述的系统<sup>[14]</sup>

$$X_{n+1} = F(p, X_n)$$

假定 $P$ 可在其标称值(nominal) $\bar{P}$ 处发生小的

变化 $\delta p$ 即 $P = \bar{P} + \delta p$ .如果 $P$ 的可变范围为 $\Delta p$ ,则 $-\Delta p \leq \delta p \leq \Delta p$ 将在短时间内引导当前状态流 $x_0$ 到最后的目標状态.若从 $x_0$ 出发向前走流态与截面相交于 $X_0$ ,而从 $x_0$ 倒退时与截面相交于 $X_1$ ,如图6.

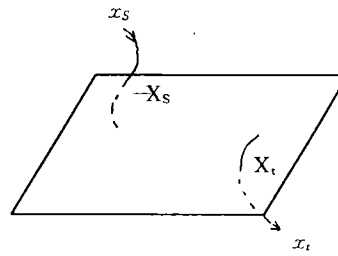


图6 Fig. 6

当 $P$ 变化 $\delta p$ 时,一次迭代将引起变化量

$$\delta X_1 = \frac{\partial F}{\partial P} \Big|_{(\bar{p}, x_0)} \delta p$$

因为 $\delta p \leq \Delta p$ ,故 $\delta X_1$ 有限.随着迭代步数的增加, $\delta X_1$ 范围也增大,并且最终会包围目标点 $X_1$ ,因此所需做的就是找到合适的 $p_i$ .一个迅速的办法是重复地将参数间隔半分并用半分后的 $\delta p$ 去引导到 $X_i$ ,即如果 $X_i$ 包含在间隔 $[F(p_{\min}, x_{n-1}), F(p_{\text{half}}, x_{n-1})]$ ,然后可用 $p_{\min}$ 与 $p_{\text{half}}$ 之间的一半去重复迭代过程,否则用 $p_{\max}$ 与 $p_{\text{half}}$ 之间的一半去重复迭代,这样就能达到 $X_i$ 的邻域.

S.O.G.Y小组的另一种瞄准方法是改变其Lyapunov指数<sup>[15]</sup>.考虑三维流

$$\dot{x}(t) = F(x(t), p)$$

为达到目标点 $X^*(P_0)$ 的邻域,需充分达到目标点的稳定流形邻域 $\epsilon' = \epsilon \times e^{-\lambda t}$ ,这里 $\lambda$ 为目标点附近的扩展Lyapunov指数, $t'$ 为从 $\epsilon'$ 邻域向目标点的演化.如果在所允许范围内的某 $P^*$ ,流达到所希望的 $P = P_0$ 稳定流形的 $\epsilon'$ 邻域,然后让 $P$ 等于其标称值 $P_0$ ,流就将自动沿着稳定流形到所期望的目标区域.这样做的优点是能有效地将目标区域从一个小的 $\epsilon$ 邻域扩展到整个稳定流形的邻域.

假定初始态为 $X_0$ ,则 $t^*$ 时刻状态为 $x = x(x_0, p, t^*)$ ,若 $P$ 变化 $\delta p$ ,则 $p_{\min} = p_0 - \delta p, p_{\max} = p_0 + \delta p$ ,则可找到一个 $p^* \in [p_{\min}, p_{\max}]$ ,以便对某一 $t^*$ , $x(x_0, P^*, t^*)$ 位于定态 $X^*$ 稳定流形的 $\epsilon'$ 范围内.如果 $x(x_0, p_{\min}, t^*)$ 位于流形一边,而 $x(x_0, p_{\max}, t^*)$ 位于另一边,则可期望存在一个值 $P^{**} \in (p_{\min}, p_{\max})$ ,使点 $X_1 = X(X \setminus - 0, p^{**}, t^*)$ 正好在稳定流形上,

如图 7.

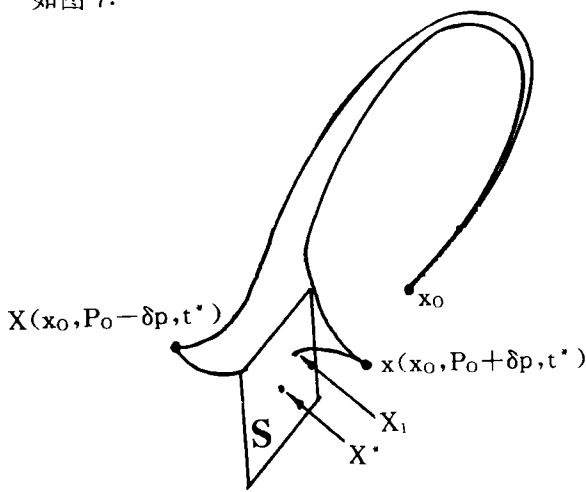


图 7 Fig. 7

如果能达到  $x_1$  的  $\epsilon'$  邻域, 则能被引到定态  $x^*$  邻域  $\epsilon$  内.

对只有一个稳定方向、两个不稳方向的三维流, 如 Lorenz 方程, 其基本思想为通过改变参数  $P$  从  $p_{\min}$  到  $p_{\max}$ , 可移动定态流从  $X_{\min}^*$  到  $X_{\max}^*$ , 如图 8.

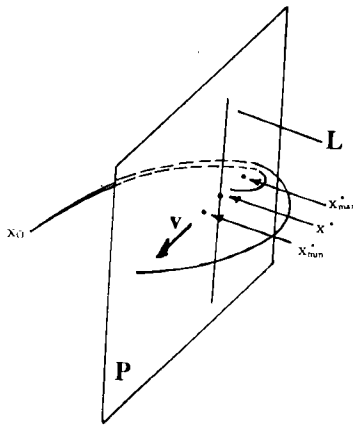


图 8 Fig. 8

让矢量  $V$  为包含  $p = p_0$  的定态且平行于  $x_{\max}^*$  与  $x_{\min}^*$  的连线的矢量, 则  $V$  与稳定流形  $L$  就构成了一平面. 如果  $x_{\min}^*$  与  $X_{\max}^*$  相距不太远且分别位于  $L$  的两边, 则某一参数  $P^* \in (p_{\min}, p_{\max})$  将导致轨道与  $L$  相交. 具体上, 可逐步将  $\delta P$  半分而实现瞄准.

### 3.2 参数调节与负反馈法

此方法是我们这个研究小组使用的方法, 此法通过对参数或输入量作有限改变, 从而瞄准目标. 此方法不仅适用于混沌区, 而且适用于分岔区. 对分岔区或混沌区中的任一点, 考虑如下形式的  $m$  维方程

$$x_{i,n+1} = f_i(x_i^*, n, p)$$

其中  $x^*$  为输入值,  $X$  为输出值. 若输入负反馈

$$X_{i,n}^* = X_{i,n+1}^* - \epsilon_{ij}(X_{j,n} - X_j)$$

通过选择合适的参数  $\epsilon_{ij}$ , 让每一步都更接近目标值, 便能迅速地瞄准目标. 亦可通过调节参数来实现目标瞄准

$$p_n = p_{n-1} - \epsilon_j(X_n - X_{out})_j$$

当选择的  $\epsilon_j$  合适, 便能很快地实现瞄准. 与 S. O. G. Y 方法相比, 此方法可用极少的步骤实现对失稳周期轨道或任一点的瞄准.

综上所述, 目前人们对非线性系统的瞄准与控制已形成了较系统的方法, 并可望在近期内系统地解决偏微分方程的瞄准与控制, 今后的发展方向将是实验与应用, 这正是我们下一步要做的工作.

### 参考文献

- 1 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Phys, Rev Lett 1990, 64 (11): 1196~1199.
- 2 Shimbrot T, Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Nature, 1993, 363 (3): 411~417.
- 3 Romeiras E J, Grebogi C, Ott E, Dayawansa W P. Physica D 58 1992, 165~192.
- 4 Koslelich E J, Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Phys. Rev. E 1993, 47 (1): 305~310.
- 5 Ying-Cheng Lai, Mingzhou Ding, Grebogi C. Phys. Rev. E, 1993, 47 (1): 86~91.
- 6 Ni Wansun and Qin Tuanfa, Chin. Phys. Lett. 1994, 11 (6): 325.
- 7 Hubermim B A, Lumer E, IEEE. Tran, Cir, Sys. 1990. 37 (4): 547.
- 8 Tan Yi, HE Xingfu, CHen Shingang, Chin. Phys. Lett., 1993, 10 (6): 321.
- 9 ZhiLin Qu, Gang Hu and Ban Kan Ma. Phys. Lett, A 178 1993, 265~270.
- 10 Hu Gang, Hekaifen, Phys. Rev. Lett. 1993, 71 (23): 3794.
- 11 Hu Gang and Qu Zhilin, Phys. Rev. Lett., 1994, 72 (1) 1994: 68.
- 12 Pyragas K. Phys. Lett, A 170, 1992: 421~428.
- 13 Kapitaniak T, Chaos. Solitons & Fractals, 1992, 2 (5): 519~530.
- 14 Shinbrot T, Ott E, Grebogi C, Yorke Phys J A. Rev. A, 1992, 45 (6): 4165.
- 15 Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, Yorke Phys J K. Lett. A 1992, 169: 349~354.

(责任编辑: 莫鼎新、唐铃弟、何启彬)