

# 平面有限元网格自动剖分法\*

## An Automatic Mesh Generation Method for Plane Finite Element Domain

刘凤秋                      李健宗  
Liu Fengqiu                Li Jianzong

(广西电力工业勘察设计院 南宁市建政路 10 号 530023)  
(Guangxi Institute on Exploration & Design of Electropower &  
Industrial projects, 10 Jianzheng Road, Nanning, Guangxi, 530023)

**摘要** 提出了一套新的完整的平面有限元网格自动剖分方法,着重介绍网格自动剖分的基本原理、推导过程、程序设计思路以及其它计算数据的前处理。

**关键词** 块元 网格自动剖分

**Abstract** A new automatic mesh generation method for plane element domain was presented. This paper focused on the discussion of its basic principle, derivation procedure, program design and pre-process of the input data.

**Key words** block element, automatic mesh generation

### 1 前言

在平面有限元计算中,以往单元网格的手工剖分,原始数据的准备和上机输入工作,是一件繁琐而又易出错的工作,特别是随着所分析题目的大型化和复杂化,数据准备的工作量急剧增加。为此,长期以来不少学者对单元网格计算机自动剖分做了大量的研究工作,对一些比较简单的剖面已经得出了网格自动剖分的方法<sup>[1,2,3]</sup>,但对于任意形状剖面的网格自动剖分至今是一个难题。而工程设计中所计算的剖面往往形状各异,文献 [1]、[2]、[3] 中所介绍的几种简单方法远远满足不了工程设计的需要。为了探讨一套对任意复杂的剖面均能自动剖分网格的方法,作者通过研究分析,建立了一套新的完整的网格自动剖分理论体系,打破了传统的网格剖分方法,由原来的人工剖分过渡到计算机自动剖分,大大减少了网格剖分的工作量,提高工作效率和工作质量,并用 Fortran 语言在我院 VAX-11/750 计算机和 IBM 微机上开发了一套网格自动剖分程序,它具有处理原始数据、网格自动剖分、数据检测、有限元计算、图形显示等功能。该程序在岩滩、长洲、贵港水电站设计中应用,

发挥了很大作用。实践证明,这套网格自动剖分方法与传统方法相比,能减少 60% 以上的工作量,具有较高的实用价值。

### 2 网格自动剖分的基本原理

首先分析二单位边长正方形标准块元的网格剖分方法,然后用此方法通过坐标系的变换实现曲边四边形状块元的网格自动剖分,再将任意形状的剖面划分成有限个块元,通过一一对应的映射关系达到剖面网格自动剖分的目的。

#### 2.1 二单位边长标准块元的网格剖分

在正方形标准块元上建立坐标系  $\xi\eta$ , 原点在正方形中心,如图 1 所示。正方形的边缘从坐标分别为  $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$ 。若将正方形  $\xi$  方向分为  $N_\xi$  等分,  $\eta$  方向分为  $N_\eta$  等分,设  $J_\xi = N_\xi + 1, J_\eta = N_\eta + 1$ , 则标准块元剖分的结点总数:

$$N_p = J_\xi \cdot J_\eta \tag{1}$$

三角形单元总数:

$$N_t = 2N_\xi \cdot N_\eta \tag{2}$$

结点从左到右,从下往上依次编号,第一个结点编号为 1,则第一行最末结点的编号为  $J_\xi$ ;第二行的起始结点编号为  $J_\xi + 1$ 。依此类推,得知第  $I_\xi$  行第  $I_\eta$  列的结点号为:

$$i = (I_\eta - 1) \cdot J_\xi + I_\xi \tag{3}$$

1994-12-07 收稿。

\* 中国水力发电学会优秀科学技术论文奖。

该点坐标值:

$$\begin{cases} \xi_i = (I_\xi - 1) \cdot \frac{2}{N_\xi} - 1 \\ \eta_i = (I_\eta - 1) \cdot \frac{2}{N_\eta} - 1 \end{cases} \quad (4)$$

而对各结点的坐标值可用下式计算

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_{i-1} + \frac{2}{N_\xi} \\ \eta_i = \eta_{i-1} + \frac{2}{N_\eta} \end{cases} \quad (5)$$

( $2 \leq i \leq N_p$ )

结点定了,单元也就划分好了。但还必须找出每一个单元的组成结点号,以便在有限元计算中取用。

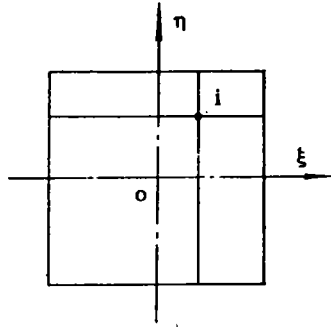


图1 Fig. 1

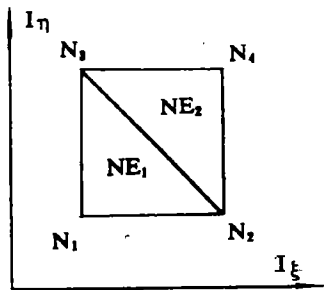


图2 Fig. 2

单元编号也从左到右,从下往上依次编号,第一层的第一个单元编号为1,第一层末的单元编号为 $2N_\xi$ ,第二层第一个单元号为 $2N_\xi + 1$ ,其余依此类推。设图2中的NE1、NE2二单元的左下角结点位于 $I_\eta$ 行、 $I_\xi$ 列,则该二单元的4个结点的编号为:

$$\begin{cases} N_1 = (I_\eta - 1) \cdot J_\xi + I_\xi = i \\ N_2 = N_1 + 1 \\ N_3 = N_1 + J_\xi \\ N_4 = N_3 + 1 \end{cases} \quad (6)$$

NE1 单元的单元编号:

$$NE1 = 2[(I_\eta - 1) \cdot N_\xi + I_\xi] - 1 \quad (7)$$

NE2 单元的单元编号:

$$NE2 = 2[(I_\eta - 1) \cdot N_\xi + I_\xi] \quad (8)$$

$$(1 \leq I_\xi \leq N_\xi; 1 \leq I_\eta \leq N_\eta)$$

组成 NE1 单元的 3 个结点号为:  $N_1, N_2, N_3$ ;

组成 NE2 单元的 3 个结点号为:  $N_2, N_4, N_3$ 。

## 2.2 任意曲边四边形的网格剖分

从上述的推导易见,标准块元在计算结点坐标,形成结点编号和单元编号方面都十分方便。因此,可以利用坐标系变换的原理,套用标准块元自动剖分的方法来解决任意曲边四边形的结点坐标、结点编号和单元编号问题,以达到剖分曲边四边形的目的。

为了反映出曲边四边形块元的曲线边界,采用曲边四边形块 12 结点等参元进行映射,如图 3 所示。在图 3(b) 中的块元上,如用等分四边的两族曲线分割该曲边四边形,以两族曲线的中心为原点( $\xi = \eta = 0$ ),沿  $\xi$  和  $\eta$  增大的方向作  $\xi$  轴和  $\eta$  轴,并令四边曲线上的  $\xi$  值及  $\eta$  值分别为  $\pm 1$ ,就得出一个新坐标系  $\xi\eta$ ,可以作为该块元的局部坐标系。引用一个 12 结点二单位边长的正方形标准块元,如图 3(a) 所示,使得图 3(a) 坐标系与图 3(b) 局部坐标系  $\xi\eta$  ——

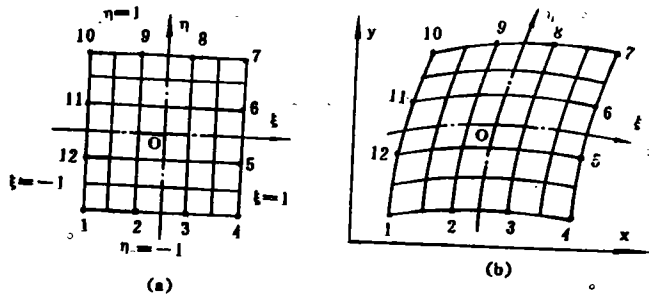


图3 Fig. 3

对应,令局部坐标和整体坐标之间的变换关系式为:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (9)$$

其中  $x_i, y_i$  为 12 结点在  $xoy$  坐标系下的坐标。

$N_i$  为形函数,其具体表达式如下:

$$\text{令 } \xi_0 = \xi, \eta_0 = \eta$$

则对于块元角点有

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)]$$

对于块元上下边中结点,有

$$\xi = \pm 1, \eta = \pm \frac{1}{3}$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0)$$

对于块元左右边中结点,有

$$\xi = \pm \frac{1}{3}, \eta = \pm 1$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \eta_0)(1 - \xi^2)(1 - 9\xi_0)$$

利用式(9)关系式,由图 3(a) 标准块元通过变换

映射很容易求出图 3(b) 的实际块元。因此,在  $\xi\eta$  平面上任意一点  $(\xi, \eta)$ ,则在  $xoy$  平面上必有一点  $(x, y)$  与之对应。由式(5)可计算出标准块元各结点的坐标  $(\xi, \eta)$ ,再由式(9)便可计算出在实际块元上各结点的坐标  $(x_i, y_i)$ ,这就解决了实际曲边四边形网格上的结点坐标问题。

结点编号和单元编号的计算可直接使用标准块元的成果,因为结点编号和单元编号并不随坐标变换而变,具有一一对应的特性,故标准块元和实际块元的分层数必然相等,即:

$$N_{\xi} = N_x; \quad N_{\eta} = N_y$$

对于组成单元结点号的计算,则根据变换后的实际块元的网格形状而定,单元号的计算仍用式(7)、(8)计算。但确定单元组成结点号之前,应根据网格变换后的坐标值,要先比较一下两对角线  $\overline{N_1N_4}$  与  $\overline{N_2N_3}$  的长度,再由准则一确定。

准则一:

如果  $\overline{N_1N_4} \leq \overline{N_2N_3}$ , 则

NE1 单元由  $N_1, N_2, N_4, 3$  结点号组成;

NE2 单元由  $N_1, N_4, N_3, 3$  结点号组成;

如果  $\overline{N_1N_4} > \overline{N_2N_3}$ , 则

NE1 单元由  $N_1, N_2, N_3, 3$  结点号组成;

NE2 单元由  $N_2, N_4, N_3, 3$  结点号组成;

这样形成的实际单元就有效地避免了产生钝角三角形单元。

### 2.3 任意复杂剖面的网格自动剖分

在这节中所要解决的问题是如何实现复杂剖面的网格自动剖分,求出网格结点上的坐标值,剖面的结点编号和单元编号,以下就来探讨这个问题。

任意形状的剖面总可以划分有限个曲边四边形,即有限个块元。剖面的各块元是相互独立又相互联系的块元。块元的相互独立是指各块元都能按照 2.2 节的方法自动形成在各自块元的结点坐标信息;块元的相互联系是指它们组成一个整体,各个块元的结点、单元编号必须整体设计采用统一编号,才能进行有限元计算。因此,整体剖面的结点坐标和网格剖分就可采用 2.2 节的方法通过有限次标准块元与剖面的实际块元之间的映射关系,由式(9)求出剖面网格结点上的实际坐标值。而剖面的结点、单元编号则根据块元之间的内在联系进行整体编号。

为了达到这个目的,采用程序设计的方法加以解决。在介绍这种方法之前,先简单地概述程序设计中的几个主要概念,以便更好地说明问题。

#### (1) 块元主控点

对剖面中的各块元四角点进行统一编号,如图 4

所示,组成各块元的四角点定义为各块元的主控点。例如:

块元 I 的主控点编号为 1,2,4,3;

块元 V 的主控点编号为 12,11,10,9。

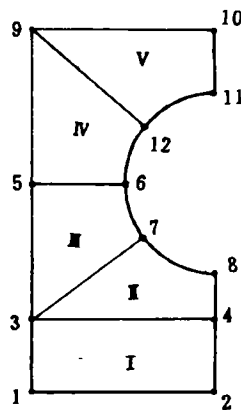


图 4 Fig. 4

块元主控点编号,按逆时针方向顺序编号。块元主控点的起始编号与块元内部自动形成的结点、单元编号的排列顺序有着直接关系。用户可根据设计要求,选任一主控点编号作为块元主控点的起始编号。

#### (2) 块元次控点

设置块元次控点的目的,是为了更真实地拟合剖面的曲线边界。块元非角点的控制点定义为块元的次控点,如图 5 所示,图中编号 1,2,……,8 为次控点,按逆时针方向编号。块元次控点编号与主控点无关,只与本块元有关。块元次控点的几何位置正好在各曲边其长度的三等分处。

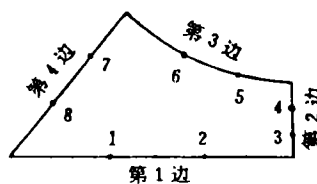


图 5 Fig. 5

程序中为了提高计算速度和减少输入数据,设有二种块元。对于无曲边的块元自动按四结点等参元进行坐标变换,对于有曲边的块元则按 12 结点等参元进行坐标变换。曲边块元如有直边,直边上的次控点由程序自动形成,不必人工输入。

#### (3) 块元各曲边编号

块元各曲边的编号分别定义为第一、二、三、四边,如图 5 所示,按逆时针方向顺序,块元主控点和次控点编号顺序一致。块元边的编号直接从块元主控点编号顺序中获得。如图 4 块元 I,主控点编号 1—2 为第一边,2—4 为第二边,4—3 为第三边,3—1 为第四边。对块元各曲边进行编号,目的在于方便程序自动处理

边界约束信息、荷载信息, 和处理块元曲边次控点信息, 以及描述各块元相互之间的内在联系。

#### (4) 常块元

如果块元同一方向各剖分线上的结点数相等以及各层的单元数相等。如图 6 所示, 定义为常块元。程序中结点、单元编号的顺序是先沿 IX 方向后沿 IY 方向依次编号。

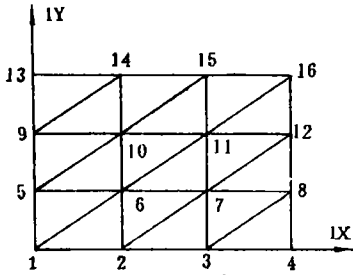


图 6 Fig. 6

当块元编号连续时, 如果相邻块元之间前块元的第二边与后块元的第四边为公共边时, 结点、单元编号的顺序是先沿连续块元的 IX 方向、后沿 IY 方向依次编号, 如图 7 所示。

#### (5) 加密块元

如果块元沿 IY 方向各剖分线上的结点和各层单元逐渐加密, 如图 8 所示。设置加密块元是为了满足单元疏密过渡的要求。加密块元具有如下特点:

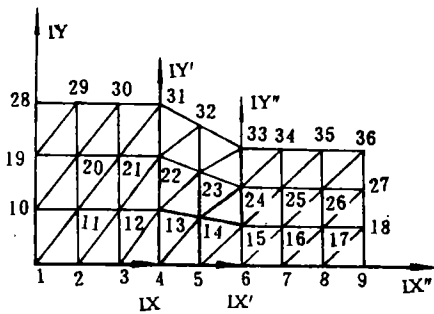


图 7 Fig. 7

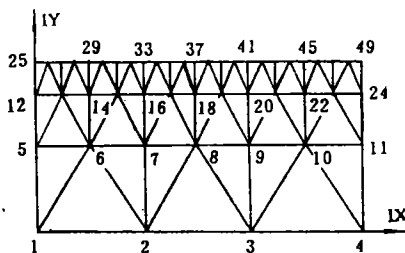


图 8 Fig. 8

沿 IY 方向各剖分线上的结点和各层单元按一定规律逐渐加密。如果块元第一边分为  $N_x$  等分, 则沿 IY 方向各剖分线上的结点数:

$$J_{xi} = 2^{(i-1)} \cdot N_x + 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (10)$$

沿 IY 方向各层的单元数为  $KE_i$ :

$$KE_i = 3 \cdot N_x \cdot 2^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

#### (6) 块元编号和块元主控点总体编号

块元编号可按任意秩序编号由程序自动产生的特点。单元编号顺序直接与块元编号有关, 基本上按块元编号顺序有规律地依次编号。由于块元可按任意先后秩序编号, 给用户提供了很大的方便, 用户可根据计算要求, 对块元的先后顺序进行排列。

块元主控点总体编号, 与程序自动产生的剖面结点、单元编号无关, 可按任意顺序排列。对块元和块元主控点总体编号的目的在于使相互联系的块元形成一个整体计算剖面。

#### (7) 块元主控参数

每个块元的主控参数均为 9 个。各块元的主控参数控制着块元的几何特性、材料特性、边界条件特性。下面分别叙述各参数的含义:

参数 1, 2, 3, 4 表示四个主控点的排列序号。块元主控点排列序号一旦确定, 块元的结点、单元编号就随之而定。

参数 5, 6 分别表示沿 IX 方向和 IY 方向的块元分层数  $N_x$  和  $N_y$ , 块元的分层数决定了块元的结点、单元数目。

参数 7 表示块元是常块元还是加密块元。

参数 8 表示块元的几何材料类型。

参数 9 表示块元是属于直边四边形还是曲边四边形, 以便是按 4 结点等参元还是 12 结点等参元进行坐标变换。

有了上述基本概念, 就可描述如何实现整个剖面结点、单元的编号问题。

计算剖面的网格自动剖分过程是按块元编号顺序通过标准块元与剖面中的实际块元之间的映射关系逐个自动剖分的过程。依据这个思路, 剖面的网格坐标系统前面已解决, 现在所存在的问题只是剖面的结点、单元编号不能直接套用标准块元的结点、单元编号。但又与标准块元的编号有直接联系。它们之间的这种关系能用各块元之间的主控参数相互联系的关系来说明。如果令计算剖面划分的块元数为  $NG$ , 用二维数组  $ID(i, j)$  表示剖面各块元的主控参数 ( $i = 1, \dots, NG; j = 1, \dots, 9$ ), 那么数组  $ID(i, j)$  则包含了各块元相互之间的关系。只要各块元 9 个主控参数一定, 剖面所划分的网格结点坐标、结点总数、单元总数和剖面几何形状就可确定。考虑到各块元按照其排

列秩序逐个进行剖分, 程序设计中采用递增数 1 的累计编号的方法随着一一对应的映射关系实现剖面的结点、单元编号。

关于剖面的结点编号; 对各块元的内剖结点可直接按累计法顺序编号; 对于块元之间公共边的结点编号, 则由数组  $ID(i, j)$  进行判别该公共边的结点是否已编号, 如已编号则不重新编号以免同一几何结点出现二个结点编号; 如未编号则按累计法顺序编号。这种累计编号过程直到最后块元剖分完毕时, 剖面所有网格结点坐标及编号即已产生, 最后的结点累计编号值即为剖面网格剖分的结点总数值。

关于剖面的单元编号: 如果用二个数组  $IE(i)$ 、 $IG(i)$  分别记录网格剖分过程中的标准块元的结点编号和剖面中的实际块元结点编号, 并使  $IE(i)$ 、 $IG(i)$  两数组一一对应, 那么就可利用准则 1 来实现剖面的单元编号, 只是将准则 1 中的  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$  由  $N'_1$ 、 $N'_2$ 、 $N'_3$ 、 $N'_4$  所替换,  $N'_1$ 、 $N'_2$ 、 $N'_3$ 、 $N'_4$  是剖面结点的实际编号, 且通过数组  $IE(i)$ 、 $IG(i)$  与  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$  一一对应。因此, 根据由  $N'_1$ 、 $N'_2$ 、 $N'_3$ 、 $N'_4$  替换后的准则 1, 剖面的单元编号就可随着一一对应的映射过程按累计编号的方法进行编号, 最后剖分的块元的最末单元的编号值即为剖面所剖分的单元总数。

加密块元的剖分问题与上述剖分原理相似, 只是加密块元所对应的标准块元有所区别, 沿  $\eta$  轴方向各剖分线上的结点数不是常数, 而是由式(11) 所确定, 各层的单元数由式(1) 所确定, 剖分过程与上述剖分过程相似。为了节省篇幅, 就不再详述。

#### 2.4 有限元计算其他计算信息的自动形成

##### (1) 单元几何材料类型信息处理

剖面在划分块元时, 必须注意把每个块元划分成只含一种几何材料类型的块元, 这样就可根据块元主控参数 8, 在块元网格单元信息形成过程中, 自动将每个单元信息再增加一个几何材料类型信息, 使得每个单元信息增加到 5 个信息(即 1 个单元编号信息、3 个组成单元的结点号信息、1 个单元几何材料类型信息), 这就解决了单元几何材料类型信息自动形成的问题。

##### (2) 边界约束信息、荷载信息处理

剖面在划分块元时, 必须注意把所有约束、荷载都作用在块元的边上。程序在块元网格结点信息形成过程中, 将各块元四边的结点号信息记录下来, 就可利用块元四边的结点信息很方便地处理边界约束和荷载信息。因为边界约束和荷载信息只与块元边界的结点号有关(体积力除外, 体积力可在单元信息中加以解决), 只要指出哪个块元哪条边界作用何种约束

或何种荷载, 计算机便可通过计算程序处理约束、荷载信息。

##### (3) 块元图形显示

块元图形显示的目的是检测输入数据。块元图形可直接根据块元主控参数通过图形程序由计算机显示出来。因为剖面划分的块元不多, 块元几何尺寸一般较大, 所以, 计算机在较短的时间内便可将块元图形清晰地显示出来, 达到检测剖面的主控点坐标系统和块元主控参数是否正确的目的。相反, 手工剖分的网格图形很难用计算机显示的方法来检测输入数据, 因为单元数目多, 显示出来的图形密密麻麻无法分辨。即使图形局部放大, 因整体和局部的图形关系模糊不清, 也无多少实用价值。

### 3 几点体会

从上述中, 不难看出有限元网格自动剖分的核心是块元。应用块元的特点解决了结点坐标、结点编号、单元编号、单元几何材料类型等信息的自动形成问题; 应用块元边的特点解决了边界约束、各种荷载信息的自动处理问题。有限元网格自动剖分法是一套新的、与传统手工剖分方法不同的网格剖分方法。从 3 年多的应用情况来看, 这套方法很受用户的欢迎, 不仅大大减少上机数据准备工作量, 而且使用起来方便、灵活、不易出错。

就用图 4 剖面来说, 该剖面只有 5 个块元、12 个主控点、8 个次控点, 信息量很少。如果令各块元的主控参数 5、6 均等于 10, 即  $N_x = N_y = 10$ , 则计算机剖分出的网格结点坐标数为 561、三角形单元数为 1000; 如果该剖面其他信息不变, 只改变各块元主控参数 5、6, 并使其均等于 20, 即  $N_x = N_y = 20$ , 则自动剖分出的网格结点坐标数多达 1911 个, 三角形单元数则高达 4000 个。相反, 如果用手工剖分, 结点数为 1911 个, 三角形单元数为 4000 个, 这工作量可能大多数人都会为之感到相当烦恼, 且花费大量的时间。而用自动剖分方法, 数据准备工作量只与计算剖面的块元数有关, 与剖面剖分的网格点数和单元数无关。根据我们的经验, 与手工剖分相比, 能减少 60%~90% 的工作量。通常划分的单元数结点数越多, 所节省的工作量越多。

有限元网格自动剖分作为 CAD 技术的一部分, 前景是广阔的, 要做的工作很多, 但有其一定的深度和广度。考虑到今后有限元前后数据技术的发展, 这项工作还有待在推广、应用中进一步完善, 更好地为生产设计服务。

(下转第 48 页 Continue on page 48)

### 3.2 东洋古北兼有种

即东洋区和古北区均有分布的种类。约占18.01%，主要代表种有：疣蝗 *Trilophidia annulata*、茅蚱 *Mogannia hebes*、中华螳螂 *Tenodera aridifolia sinensis*、珀·螳 *Plautia fimbriata*、松丽叩甲 *Camposternus auratus*、琉璃弧丽金龟 *Popillia flavosellata*、迹银纹刺蛾 *Miresa inornata*、豆黄粉蝶 *Eurema hecabe*、中华蜜蜂 *Apis cerana*、山崎虻 *Tabanus yamasakii* 等。

### 3.3 广布种

即分布范围跨3个区以上的种类。这些种类在十万大山的昆虫区系中所占比例不大，仅为2.3%。主要代表种有：中华稻蝗 *Oxya chinensis*、中华剑角蝗 *Acrida cinerea*、侧刺螳 *Andrallus spinidens*、稻绿螳等。

调查结果表明，十万大山的昆虫以东洋区系种为主体，与地处桂东北的猫儿山相比，热带区系的成分有了明显的增多，而来自缅甸——印度区系的成分虽有减少，但仍占有相当的比例，纯古北种则尚未见有分布；另外，十万大山的昆虫种类和数量虽然具有随海拔的升高而减少的趋势，但其区系结构则无明显的变化，东洋种始终居于主体地位。分析其原因，可能是由于十万大山属热带季节性雨林气候，植被主要为典型的热带类型，同时，该山南临北部湾，受热带海洋气候的影响，光热资源丰富，雨量充沛，终年无冬，气温随海拔变化不大，对昆虫的生存及区系结构无多大的影响。而其种类和数量则随海拔的升高而减少，很可能是由于植被趋于单一及环境风力增大所致。与

大瑶山、猫儿山等山体相比，十万大山表现出热带与南亚热带过渡地区的昆虫区系特点。

## 4 建议

十万大山具有丰富的动植物资源。建议加强对现有森林资源的保护，严禁乱砍滥伐，尽快在周围荒山荒地地带植树造林，增加森林郁闭度，保护生物的多样性，特别是充分发挥天敌昆虫在生物群落结构中的调控作用，使森林生态系统向稳定、协调的方向发展。

十万大山具有许多珍稀树种，其中有国家重点保护的一类、二类和三类珍贵植物12种，在加强对这些稀有树种的保护，使之成为特有树种之活标本园，为科研和教学提供基地的同时，还应对这些珍稀树种尤其是某些濒危植物的病虫害种类和危害程度进行系统的调查和研究，以便有针对性地采取保护和挽救措施。

### 致谢

承蒙广西农业大学胡少波教授、张永强教授审阅文稿，陈贻云、曾芝英、蒙超衡同志参加部分调查和标本整理工作，谨此一并深表谢意。

### 参考文献

- 1 马世骏. 中国昆虫生态地理概述. 北京: 科学出版社, 1959.
- 2 尤其傲等. 岑岗自然保护区昆虫区系分布及经济昆虫概况. 广西科学院学报, 1982, (1): 133~140.
- 3 广西壮族自治区林业厅. 广西自然保护区. 北京: 中国林业出版社, 1993, 83~86.

(责任编辑: 梁积全、蒋汉明、何启彬)

(上接第19页 Continue from page 19)

### 参考文献

- 1 江见鲸等编. 土建工程常用微机程序汇编. 清华大学出版社, 1987.
- 2 Zienkiewicz Q C, Phillips D V. An automatic mesh genera-

tion scheme for plane and curved element domains. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 3, 519~28, 1971.

- 3 Gordon W J, Hall C A. Construction of curvilinear co-ordinate systems and application to mesh generation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 7, 461~77, 1973.

(责任编辑: 梁积全、唐铃弟、何启彬)