DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.1995.02.003

广西科学 Guangxi Sciences 2（2）：10～13　1995

双圆 n 边形初探

A Preliminary Study on the Bicircular n－polygon

苏文龙

Su Wenlong

（广西梧州一中　广西梧州　543002）

（Wuzhou No. 1 Middle School，Wuzhou，Guangxi，543002）

摘要　解决了双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形的存在性并导出它们的一个重要性质：以双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形外接圆上的任意一点为起点都可作成一个新的双圆 n 边形。

关键词　双圆 n 边形　存在性　双向递推数列

Abstract　This paper solved the existence of bicircular n－polygon and inferred one of its important characters：a new bicircular n－polygon can be drawn starting from any point on the circumscribed circle of the bicircular n－polygon（$3\leqslant n\leqslant 6$）.

Key words　bicircular n－polygon，existence，two－way recurrent sequence of number

综述性的文献［1］报道：我国学者近年来“对富斯研究过的双圆四边形（既有内切圆、又有外接圆的四边形，也叫双心或弦切四边形）作了深入挖掘，共归纳出29条性质…… 而对于非等边的双圆 $n(n\geqslant 5)$ 边形的存在性问题及其性质，尚有待探讨”. 可见这问题难度很大. 为此，本文引进了双向递推数列，用构造性的方法给出了一般双圆 n 边形的定量描述，并完满地解决了双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形存在性问题，推导得一些最基本的性质.

1　双圆 n 边形与双向递推数列

给定实数 a,b,r，令 $d=\sqrt{a^2+b^2}$，设

$$r>0\text{ 且 }r+d<1 \tag{1}$$

则单位圆内含以 $O_1(a,b)$ 为圆心 r 为半径的圆 O_1. 以单位圆上任意一点 Z_0 为起点在单位圆上构作两个点列：正向点列 $Z_0,Z_1,Z_2\cdots\cdots$ 按逆时针方向（正方向）排列，负向点列 $Z_0,Z_{-1},Z_{-2}\cdots\cdots$ 按顺时针方向（负方向）排列，并且诸线段 Z_kZ_{k+1}（k 为整数，下同）都与圆 O_1 相切. 这两个点列可统一记为 $\{Z_k\}$ 而称为双向递推点列. 一般地，这点列是无限的且未必有重合的两点；如果从 Z_0 开始恰好转过一圈而有 Z_n 或 Z_{-n} 与 Z_0 重合，我们就说多边形 $Z_0Z_1\cdots\cdots Z_n$ 或 $Z_0Z_{-1}\cdots\cdots Z_{-n}$ 是双圆 n 边形并说关于参数 a,b,r 的双圆 n 边形存在. 显然，当 Z_n 或 Z_{-n} 与 Z_0 重合时 Z_k 与 $Z_{k-n}(0\leqslant k\leqslant n)$ 也重合.

不失一般性，现在规定起点 $Z_0(1,0)$. 以 x 轴的正半轴为始边按正方向（当 $k>0$）或负方向（当 $k<0$）旋转到向量 OZ_k（O 为坐标原点）所成的角记为 θ_k，约定 $\theta_0=0$. 令 $x_k=\operatorname{tg}\dfrac{\theta_k}{4}$，则与点列 $\{Z_k\}$ 相应的 $\{x_k\}$ 称为双向递推数列.

据上述定义知关于参数 a,b,r 的双圆 n 边形存在的充要条件是 $\theta_0<\theta_1<\cdots\cdots\theta_n=2\pi$ 并且点 Z_k 与 $Z_{k-n}(0\leqslant k\leqslant n)$ 重合. 因此对于 $0<k<n$，有 $\theta_k-\theta_{k-n}=2\pi\Leftrightarrow\operatorname{tg}\dfrac{\theta_k}{4}=\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_{k-n}}{4})\Leftrightarrow x_kx_{k-n}=-1$，并且 $0<x_k<x_{k+1}$，故有

定理1　关于参数 a,b,r 的双圆 n 边形存在的充要条件是，对于任意 $0<k<n$，有 $x_kx_{k-n}=-1$ 且 $0<x_k<x_{k+1}$.

考察顶点按正方向排列的 $\triangle O_1Z_kZ_{k+1}$ 的面积. 为书写简便，记 $\alpha=\theta_k,\beta=\theta_{k+1}$，则 $Z_k(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Z_{k+1}(\cos\beta,\sin\beta)$，因为点 O_1 到边 Z_kZ_{k+1} 的距离为 r，故有

$$\frac{1}{2}r\sqrt{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\end{vmatrix}$$

1995-03-01收稿。

$\Rightarrow 2r\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin(\beta-\alpha)-a(\sin\beta-\sin\alpha)$

$-b(\cos\beta-\cos\alpha)\Rightarrow$

$r=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-a\cos\frac{\beta+\alpha}{2}-b\sin\frac{\beta+\alpha}{2}$

$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-a(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

$-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})-b(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

令 $A=r-a+1,B=2b,C=r+a-1,D=4a+4$,据 x_k 的定义及万能公式

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-x_k^2}{1+x_k^2},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2x_k}{1+x_k^2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1-x_{k+1}^2}{1+x_{k+1}^2},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{2x_{k+1}}{1+x_{k+1}^2}$$

代入上式整理就得到初值为 $x_0=O$ 的数列 $\{x_k\}$ 的递推公式

$$x_{k+1}^2(Cx_k^2-Bx_k+A)-x_{k+1}(Bx_k^2+Dx_k-B)+Ax_k^2+Bx_k+C=0 \quad (2)$$

解这二次方程得两个实根,相应于由单位圆上的点 Z_k 引圆 O_1 的两条切线交单位圆于点 Z_{k+1} 与 Z_{k-1}. 这里蕴含的递推规律,是探索双圆 n 边形奥秘的锁匙.

2 双向递推数列的若干命题

以下约定当 $k>0$ 时 $i=1$,当 $k<0$ 时 $i=-1$. 由(1)知 $0<r<1-a\Leftrightarrow B^2-4AC=4[b^2+(1-a)^2-r^2]>0$. 注意到 $x_0=0$,在(2)中令 $k=0$ 或 -1 即得

命题1 $Ax_i^2+Bx_i+C=0.\ (B^2-4AC>0)$.

在(2)中把 k 换成 $k-1$ 并整理可得

$$x_{k-1}^2(Cx_k^2-Bx_k+A)-x_{k-1}(Bx_k^2+Dx_k-B)+Ax_k^2+Bx_k+C=0 \quad (3)$$

与(2)比较可知 x_{k+1} 与 x_{k-1} 是一个二次方程的两根,据韦达定理有

命题2 设 $Cx_k^2-Bx_k+A\neq 0$,则

$$x_{k+i}=-x_{k-i}+\frac{Bx_k^2+Dx_k-B}{Cx_k^2-Bx_k+A} \quad (4)$$

$$x_{k+1}x_{k-1}=\frac{Ax_k^2+Bx_k+C}{Cx_k^2+Dx_k-B} \quad (5)$$

这是更简明的递推公式. 其中(4)式当 $k>0(i=1)$ 或者 $k<0(i=-1)$ 时分别向正、负两个方向递推.

命题3 设 $x_k=\frac{M_kx_i+N_k}{P_kx_i+Q_k}$,其中 M_k、N_k、P_k、Q_k 的最大公约数为1. 记 $M=B^2-AD$, $N=AB+BC,Q=C^2-A^2$,则 $M_{2i}=M,N_{2i}=P_{2i}=N,Q_{2i}=Q$;

$$M_{3i}=D^2A^3-DAB^2(3A+C)+B^4(2A+C)+BNQ-AQ^2$$

$$N_{3i}=-DAN(A+C)+BN^2+NQ(A+C)$$

$$P_{3i}=-D^2ABC+DB[B^2C-AB^2-A(A+C)^2]+B^5-BN^2+2ANQ$$

$$Q_{3i}=-D^2AC^2+DB^2C(C-A)+B^4C-BNQ+AQ^2$$

证明:由命题1知 $Ax_i^2=-Bx_i-C$,在(4)中令 $K=i$ 得 $x_{2i}=\frac{-A(Bx_i^2+Dx_i-B)}{-A(Cx_i^2-Bx_i+A)}=\frac{B(Bx_i+C)-ADx_i+AB}{C(Bx_i+C)+ABx_i-A^2}$ 即得 $M_{2i}=M,N_{2i}=P_{2i}=N,Q_{2i}=Q$. 在(4)中令 $k=2i$ 得

$$x_{3i}=\frac{-A^2x_i}{A^2}+\frac{B(Mx_i+N)^2+D(Mx_i+N)(Nx_i+Q)-B(Nx_i+Q)^2}{C(Mx_i+N)^2-B(Mx_i+N)(Nx_i+Q)+A(Nx_i+Q)^2}$$

把上式通分、相加,并据 $Ax_i^2=-Bx_i-C$ 降次,可以化到 x_i 的一次分式 $(M_3x_i+N_3)/(P_3x_i+Q_3)$,其中

$$M_3=(AC-B^2)(CM^2-BMN+AN^2)+AB(2CMN-BMQ+2ANQ-BM^2-DMN)+A^2(2BMN+DMQ+DN^2-CN^2-BNQ-AQ^2)$$

$$N_3=-BC(CM^2-BMN+AN^2)+A^2(BN^2+DNQ-BQ^2)+AC(2CMN-BMQ+2ANQ-BM^2-DMN)$$

$$P_3=-AB(CM^2-BMN+AN^2)+A^2(2CMN-BMQ-BN^2+2ANQ)$$

$$Q_3=-AC(CM^2-BMN+AN^2)+A^2(CN^2-BNQ+AQ^2)$$

各式展开整理成按 D 的降幂排列,可得到 $M_3=A^2M_{3i},N_3=A^2N_{3i},P_3=A^2P_{3i},Q_3=A^2Q_{3i}$,约去公因式 A^2 得命题3的结论. 证毕.

命题4 设 $kj<0$,则 $x_kx_j=-1\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_kN_j+P_kQ_j=M_jN_k+P_jQ_k & (6)\\ C(M_kM_j+P_kP_j)-B(M_kN_j+P_kQ_j)+A(N_kN_j+Q_kQ_j)=0 & (7)\end{cases}$$

证明:据命题1有 $A(x_1+x_{-1})=-B,Ax_1x_{-1}=C$,故有

$$x_k x_j = -1 \Leftrightarrow \frac{M_k x_i + N_k}{P_k x_i + Q_k} \cdot \frac{M_j x_{-i} + N_j}{P_j x_{-i} + Q_j}$$
$$= \frac{-A}{A} \Leftrightarrow$$
$$A x_1 x_{-1}(M_k M_j + P_k P_j) + A(x_1 + x_{-1})$$
$$(M_k N_j + P_k Q_j) + A(N_k N_j + Q_k Q_j)$$
$$= x_i(M_k N_j + P_k Q_j - M_j N_k - P_j Q_k)$$
$$\Leftrightarrow x_i(M_k N_j + P_k Q_j - M_j N_k - P_j Q_k)$$
$$= C(M_k M_j + P_k P_j) - B(M_k N_j + P_k Q_j)$$
$$+ A(N_k N_j + Q_k Q_j)$$

由命题1知 x_i 为二次根式，故上述一次方程两边均为零即得(6)、(7)．证毕．

命题5 记 $E = A + C, F = D + 2A - 2C, G = AD - CD - 2B^2, H = D^2 + 8B^2 + 4(A - C)^2$，则

$$x_2 x_{-1} = -1 \Leftrightarrow EF = G.$$
$$x_2 x_{-2} = -1 \Leftrightarrow E^2 H - G^2 = 0$$
$$x_3 x_{-2} = -1$$
$$\Leftrightarrow E^3 F(H - 4G) + E^2 F^2 G - EFG^2 - G^3 = 0$$
$$x_3 x_{-3} = -1$$
$$\Leftrightarrow E^4 F^2(H - 4G) + 2E^2 G^2 H - 3G^4 = 0$$

证明：易知 $M_{-1} = Q_{-1} = 1, N_{-1} = P_{-1} = 0$，在命题4中令 $K = 2, j = -1$ 知(6)成立．由(7)并据命题3有 $CM - BN + AQ = 0$ 可化到 $EF = G$．

在命题4中令 $k = -j = 2$ 知(6)成立．由(7)及命题3有

$$C(M^2 + N^2) - B(MN + NQ) + A(N^2 + Q^2)$$
$$= A[D^2 AC + DB^2(A - C) - B^4 + 2N^2 + Q^2]$$

另一方面，把 $E^2 H - G^2$ 展开整理按 D 的降幂排列，也有

$$E^2 H - G^2$$
$$= 4[D^2 AC + DB^2(A - C) - B^4 + 2N^2 + Q^2]$$

故有 $x_2 x_{-2} = -1 \Leftrightarrow E^2 H - G^2 = 0$

在命题4中令 $k = 3, j = -2$，可以验证(6)成立．令

$$x = C(MM_3 + NP_3) - B(NM_3 + QP_3)$$
$$+ A(NN_3 + QQ_3)$$
$$y = E^3 F(H - 4G) + E^2 F^2 G - EFG^2 - G^3$$
$$Z = D^3 A^2 C + D^2(A^2 B^2 - 2AB^2 C + C^2 Q)$$
$$+ D[B^4(C - 2A) + 2B^2(CQ + E^3)$$
$$- CQ^2] + B^6 + B^4 Q - BNQ(3A$$
$$+ 5C) - Q^3$$

把 x、y 整理按 D 的降幂排列，可验证恒等式 $x = -A^2 Z, y = 8Z$．故由命题4有 $x_3 x_{-2} = -1 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = 0$．

在命题4中令 $k = -j = 3$，由命题3可知(6)成立．记

$$u = C(M_3^2 + P_3^2) - B(M_3 N_3 + P_3 Q_3)$$
$$+ A(N_3^2 + Q_3^2)$$
$$v = E^4 F^2(H - 4G) + 2E^2 G^2 H - 3G^4$$
$$W = D^4 AC(E^2 - 3AC) + D^3 B^2(A - C)(E^2$$
$$- 6AC) + 2D^2[B^4(9AC - 2E^2) + N^2(A^2$$
$$+ C^2) - ACQ^2] + 2D[3B^6(A - C)$$
$$+ BNQ(2B^2 - E^2 - 4AC)] + B^4(-3B^4$$
$$+ 4N^2 + 2Q^2) + 4N^2 Q^2 + Q^4$$

把 u、v 整理成按 D 的降幂排列，有恒等式 $u = A^2 EW, V = 16W$，故由命题4有 $x_3 x_{-3} = -1 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow V = 0$，证毕．

3 双圆 $n(3 \leqslant n \leqslant 6)$ 边形的存在性及其性质

定理2 关于参数 a, b, r 的双圆 $n(3 \leqslant n \leqslant 6)$ 边形存在的充要条件是：d, r 满足(1)及相应的关系式

$$n = 3: 2r = 1 - d^2 \tag{8}$$
$$n = 4: 2(1 + d^2)r^2 = (1 - d^2)^2 \tag{9}$$
$$n = 5: 8d^2 r^3 + 4(1 - d^2)r^2 - 2(1 - d^2)^2 r - (1 - d^2)^3 = 0 \tag{10}$$
$$n = 6: 16d^2 r^4 + 4(1 + d^2)(1 - d^2)^2 r^2 - 3(1 - d^2)^4 = 0 \tag{11}$$

证明：据1及命题5的记法，易知 $E = 2r, F = 8, G = 8(1 - d^2), H = 32(1 + d^2)$，据命题5，当 $n = 3$ 时有 $x_2 x_{-1} = -1 \Leftrightarrow EF = G \Leftrightarrow 2r \cdot 8 = 8(1 - d^2)$ 即(8)．仿此当 $n = 4, 5, 6$ 时分别有(9)(10)(11)．

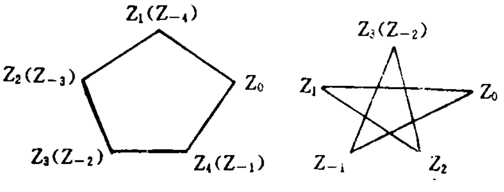

图1 Fig. 1

考察 $n = 5$ 的情形．由上述推导知(10)等价于 $x_3 x_{-2} = -1$，由1知此时顶点 Z_3 与 Z_{-2} 重合．只有两种情形如图1示．但在五星形中 $2\pi < \theta_3 < 4\pi$ 故有 $x_3 = \mathrm{tg}\frac{\theta_3}{4} < 0$ 不满足定理1 $x_3 > 0$ 的条件．因此只有第一种情形：如图1显然有 Z_k 与 Z_{k-5} 重合且 $0 \leqslant \theta_k < \theta_{k+1} \leqslant 2\pi (0 \leqslant k \leqslant 5)$，由1知这等价于定理1的条件．因此当 $n = 5$ 时由定理1即得定理2．仿此可证更简单的 $n = 3, 4, 6$ 的情形．证毕．

双圆 n 边形的外接圆和内切圆都由这 n 边形唯一确定，但反之不然．定理2表明双圆 n 边形的存在性只与 r 和 d 有关，因此就不必限定内切圆心 $O_1(a, b)$

的具体位置(只须 $a^2+b^2=d^2$ 且 r,d 满足相应的条件),也就不必规定特别的起点(只要 Z_0 在外接圆上).由此易知双圆 n 边形的一个重要的性质:

定理 3 以双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形外接圆上的任意一点为起点都可作成一个新的双圆 n 边形.

以下各例由中华学习机 CEC—I 算出.对于给定的 n,a,b,由定理 2 得 r,由命题 1、2 得 $\{x_k\}$.据 1 知顶点 Z_k 的横坐标与纵坐标分别为 cos (4arctg x_k)、sin (4arctg x_k),即可精确作图(下述各例外接圆与内切圆几乎相切,这里作图从略).

例 1 $n=5,a=0.8,b=0.1$,算得 $r=0.193714275$.

k	x_k	cos (4arctg x_k)	sin (4arctg x_k)
1	0.0296929854	0.992959034	0.118458248
2	0.0360157422	0.989649799	0.143503572
3	0.124439776	0.879867315	0.475219432
4	1.85985758	−0.391748441	−0.920072366
5	−7.014838E+09	1	0

注:$r+d=0.999940051$ 此时内切圆与外接圆几乎相切!很难作图!

例 2 $n=6,a=0.3,b=-0.4$,算得 $r=0.499187103$

k	x_k	cos (4arctg x_k)	sin (4arctg x_k)
1	0.861498038	−0.956199251	0.292716572
2	2.69414223	0.148589602	−0.988898948
3	3.88452042	0.533684590	−0.845683604
4	4.29915654	0.610456354	−0.792049897
5	5.14457662	0.719342088	−0.694656002
6	−1.36976462E+10	1	0

注:$r+d=0.999187103$ 例 3 同此.

例 3 $n=6,a=-0.3,b=0.4$,算得 $r=0.499187103$

k	x_k	cos (4arctg x_k)	sin (4arctg x_k)
1	0.480901673	−0.220389588	0.975411928
2	0.595101983	−0.545046526	0.838405799
3	0.625016611	−0.615995220	0.787749889
4	0.68494706	−0.738882579	0.673834203
5	1.08044225	−0.988075245	−0.15397178
6	−6.78416426E+09	1	0

注:理论上 $\theta_n=2\pi$ 故有 $x_n\to\infty$,但因计算机截断误差,故诸 x_k 都是近似值.

参考文献

1 杨 之.近年中国初等数学研究的若干新成果.数学通讯,1994,(7):22.

(责任编辑:莫鼎新、邓大玉)