DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.1995.02.021
广西科学 Guangxi Sciences 2 (2): 78～80 1995

多目标规划最优性必要条件的一点改进

Refinements of Necessary Conditions for Optimality in Multiobjective Programming

张成科
Zhang Chengke

(桂林工学院基础部 桂林 541004)
(Depart. of basic sciences , Guilin Institute of Technology, Guilin, 541004)

摘要 讨论多目标规划的最优性必要条件，提出了一个比通常的 Fritz John 必要条件更深刻的必要条件. 举例说明其更为合理.

关键词 多目标规划 最优性必要条件 约束规格.

Abstract This paper discussed the necessary conditions for optimality in multiobjective programming, and pressented a new set of necessary conditions for optimality which is sharper than the usual Fritz John one . Examples showed that it was more reasonable.

Key words multiobjective programming, necessary optimality condition, constraint qualification

1 引言

考虑多目标非线性规划问题

$$(P)\begin{cases}\min f(x) \\ s.t.\ \begin{matrix} g(x)\leqslant 0 \\ h(x)=0\end{matrix}\end{cases}$$

其中 $f:R^n\to R^m, g:R^n\to R^p, h:R^n\to R^q$ 为 R^n 上的局部 Lipschitz 函数.

记 $F=\{x\in R^n|g(x)\leqslant 0,h(x)=0\}$. $I_o(x)=\{i|g_i(x)=0,i=1,\cdots,P\}$. 对局部 Lipschitz 函数 φ: $R^s\to R$, 记 $2\varphi(x)$ 为 φ 在 x 的 Clarke 广义方向导数.

对问题 (P), 点 $\bar{x}\in R^n$ 为最优的 Fritz John(以下简称 $F-J$) 必要条件为: 存在不全为零的 $(\rho,\lambda',\mu')'\in R^m\times R^p\times R^q$ 使

$$0\in\partial f(\bar{x})\rho+2\partial g(\bar{x})\lambda+\partial h(\bar{x})\mu \qquad \rho\geqslant 0 \tag{1}$$

$$(\lambda'\mu')\in \pounds(\bar{x})=\{\lambda\in R^p,\mu\in R^q|\lambda\geqslant 0, \lambda_i=0,i\notin I_o(\bar{x})\} \tag{2}$$

如果 ρ 不全为零, 则 (1) 和 (2) 就构成 Kuhn Tucker(以下简称 $K-T$) 必要条件.

众所周知, $F-J$ 或 $K-T$ 必要条件是最重要且较成熟的必要条件, 许多算法是基于它们而设计的. 因此对实际问题来说, 若满足条件(1) 和(2) 的点太多(见例 1 及下一节的例 2), 就会增加计算量且可能使算法失效.

例 1 考虑问题

$$(P_1)\begin{cases}\min\ f(x_1,x_2)=[f_1(x_1,x_2),\cdots,f_m(x_1,x_2)] \\ s.t.\ g_1(x_1,x_2)=-|x_1|-|x_2|\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $f_i(x_1,x_2)$ $(i=1,\cdots,m)$ 在点 $\bar{x}=(0,0)'$ 是局部 Lipschitz 的.

显然 $F=R^2$(即 (P_1) 实际为无约束问题), 因此一个比较合理的最优性必要条件应为:

$$0\in\partial f(\bar{x})\rho,\quad \rho\geqslant 0\ 且\ \sum_{i=1}^{m}\rho_i=1 \tag{3}$$

但 $I_O(\bar{x})=\{1\}, \partial g_1(\bar{x})=\{(\alpha,\beta)'\in R^2|\alpha,\beta\in[-1,1]\}, \underset{\lambda\geqslant 0}{U}\lambda\partial g_1(\bar{x})=\{\lambda\xi|\lambda\geqslant 0,\xi\in\partial g_1(\bar{x})\}=R^2$. 因此, 若取 $\rho=e=(1,\cdots,1)\in R^m$, 则对任意 $f_i(i=1,2,\cdots,m)$, $F-J$ 必要条件(1) 和(2) 满足. 即 $F-J$ 必要条件并不总是归结为条件(3).

因此, 寻找一个比 $F-J$ 必要条件更强的必要条件在理论和计算实际上都是非常有意义的. 对 $m=1$ 的单目标非线性规划问题, 文献[1] 得到了比 $F-J$

1995-03-27 收稿。

必要条件更深刻的最优性必要条件.然而就我们目前所知,关于多目标非线性规划问题的类似结果还没有得到.本文就这一问题进行了讨论,得到了一个比通常的 $F-J$ 必要条件(1)和(2)更强的必要条件.

下面引进一些通篇采用的记号.

对 $V=(V_1,\cdots,V_s)'\in R^s$, V_+ 表示其每个分量都大于等于零的向量.另外记 $|V|=\sum_{i=1}^{s}V_i$.对 $t\in[1,+\infty]$, $\|\cdot\|_t$ 表示 R^s 中的 l_t 范数.$A\subset R^p\times R^q$ 是点集 $\{(g',h')'\ |\ \|(g'_+,h')'\|_t>0\}$.$\bar{B}$ 为闭单位球 $\{Z\in R^s\ |\ \|Z\|_2\leqslant 1\}$.设 D 为 R^s 中的点集,记 $\mathring{D}$, $D^c=R^s/D$, ConeD 和 ConvD 分别为 D 的内部,补集,生成锥和凸包.

$H=\{(g',h')'\in R^p\times R^q|(g',h')'=(g(x)',h(x)')',x\in F^c\}$

局部 Lipschtitz 函数 $\varphi:R^s\to R$ 相对于集 $D\subset R^s$ 的 Clarke 广义方向导数为:

$\partial|_D\varphi(x)=\{\xi\in R^s|\xi$ 为 $\xi_i\in\partial\varphi(x_i)$ 的一组点[2],其中 $x_i\in D,x_i\to x\}$ 当 φ 为向量值函数时,$\partial|_D\varphi(x)$ 理解为相对于 D 的广义 Jacobian.另外,为了方便起见,下文中用 (g,h) 表示 (g',h'),对别的向量也作相似理解.

下面不加证明地罗列一些要用到的结果,详细的证明见文献[1]和文献[2].

性质 1 见文献[2],点集映射:$x\to\partial|_D\varphi(x)$ 为紧的和上半连续的;当 $x\in\mathring{D}$ 时,$\partial|_D\varphi(x)=\partial\varphi(x)$.

引理 1 对任意 $t\in[1,+\infty]$,有:(i). $O\notin\partial|_D\|g_+,h\|_t$;(ii). 如果 $\|g_+,h\|_t=0$ 且 $(\beta,\gamma)\in\partial|_D\|g_t,h\|_t$,则 $\beta\geqslant 0$,且当 $g_t<0$ 时,$\beta_t=0$.

引理 2 对任意 $x\in R^n$ 和 $t\in(1,+\infty)$,有 $\partial|_{F^c}\|g_+(x),h(x)\|_t\subseteq\{\partial|_{F^c}[g(x),h(x)]\}\partial|_H\|g_+(x),h(x)\|_t$.

2 主要结果

引理 3 如果 $\bar{x}$ 是问题 $(\bar{P})\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\ \varphi(x)\leqslant 0\end{cases}$ 的局部有效解,则存在 $\eta\geqslant 0,\sigma\geqslant 0$ 使 $|(\eta,\sigma)|=1$ 且

$$0\in\partial f(\bar{x})\eta+\sigma\partial|_{F_\varphi^c}\varphi(\bar{x})$$

其中 $\eta\in R^m$, $F_\varphi=\{x\in R^n|\varphi(x)\leqslant 0\}$.

证明 设 $\varepsilon>0$ 为给定的常数,考虑函数

$$F(Z)=\max\{f_1(Z)-f_1(\bar{x})+\varepsilon,\cdots,f_m(Z)-f_m(\bar{x})+\varepsilon,\varphi(Z)\}$$

由于 $\bar{x}$ 是 $(\bar{P})$ 的局部有效解,从而存在 $\delta>0$(记 $\bar{C}=\bar{x}+\delta\bar{B}$),使得不存在 $x\in\bar{C}$ 使 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$.由此知 $F(Z)$ 在 $\bar{C}$ 上恒为正.事实上,若存在 $Z\in\bar{C}$ 使 $F(Z)\leqslant 0$,则 $\varphi(Z)\leqslant 0$(即 Z 是 $(\bar{P})$ 的可行点),且 $f(Z)\leqslant f(\bar{x})-\varepsilon e$,这与 $\bar{x}$ 为 $(\bar{P})$ 的有效解矛盾.进一步地,因为 $F\bar{x}=\varepsilon$,我们有:

$$F(\bar{x})\leqslant inf[F(Z)+\varepsilon]$$

由 Ekeland 定理[2],存在 $Z_\varepsilon\in\bar{x}+\sqrt{\varepsilon}\bar{B}$ 使 Z_ε 为问题

$$\begin{cases}\min[F(Z)+\sqrt{\varepsilon}\|Z-Z_\varepsilon\|_2]\\ s.t.\quad Z\in\bar{x}+\sqrt{\varepsilon}\bar{B}\end{cases}$$

的解,从而对 $\varepsilon<\delta^2$,我们有:

$$0\in\partial F(Z_\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\bar{B}\tag{4}$$

由 $F(Z_\varepsilon)$ 的定义,$\partial F(Z_\varepsilon)$ 只可能为下面三种可能的情形:

(a) $\partial F(Z_\varepsilon)=\partial f_i(Z_\varepsilon)$,若存在某个 $i(i=1,\cdots,m)$ 使 $f_i(Z_\varepsilon)-f_i(\bar{x})+\varepsilon=F(Z_\varepsilon)>\varphi(Z_\varepsilon)$;

(b) $\partial F(Z_\varepsilon)=\partial\varphi(Z_\varepsilon)$,若对任意 $i=1,\cdots,m$, $f_i(Z_\varepsilon)-f_i(\bar{x})+\varepsilon<F(Z_\varepsilon)=\varphi(Z_\varepsilon)$;

(c) $\partial F(Z_\varepsilon)=\mathrm{conv}\{\partial f_1(Z_\varepsilon),\cdots,\partial f_m(Z_\varepsilon),\partial\varphi(Z_\varepsilon)\}$,若 $f_1(Z_\varepsilon)-f_1(\bar{x})+\varepsilon=\cdots=f_m(Z_\varepsilon)-f_m(\bar{x})+\varepsilon=F(Z_\varepsilon)=\varphi(Z_\varepsilon)$.

对情形(a),取 $\eta_\varepsilon=\overbrace{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}^{m\text{个}}$,$\sigma_\varepsilon=0$;对情形(b),取 $\eta_\varepsilon=0,\sigma_\varepsilon=1$;对情形(c),按照文献[3]的推论 17.1 取 η_ε 和 σ_ε.则不论在哪种情形,由(4)式都有 $\eta_\varepsilon\geqslant 0,\sigma_\varepsilon\geqslant 0,1(\eta_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)|=1$ 使

$$O=\partial f(Z_\varepsilon)\eta_\varepsilon+\sigma_\varepsilon\xi_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\xi_\varepsilon,$$
$$\zeta_\varepsilon\in\partial\varphi(Z_\varepsilon),\xi_\varepsilon\in\bar{B}\tag{5}$$

又注意到,$\sigma_\varepsilon>0\Rightarrow\varphi(Z_\varepsilon)=F(Z_\varepsilon)>0\Rightarrow Z_\varepsilon\in F_\varphi^c$
$$\tag{6}$$

现在为了得到结论,只须考虑收敛于 0 的序列 $\varepsilon_k>0$ 并按上面所述取相应的 $Z_{\varepsilon k}$,则 $Z_{\varepsilon k}\to\bar{x}$.再由次微分映射的上半连续性和(5)式知:存在 $\eta\geqslant 0$ 和 $\sigma\geqslant 0$,使 $|(\eta,\sigma)|=1$ 且 $\sigma\in\partial f(\bar{x})\eta+\sigma\bar{\zeta}$.进一步地,若 $\sigma>0$,则由(6)知 $\zeta\in\partial|_{F_\varphi^c}(\varphi(\bar{x}))$.证毕.

定理 1 设 $\bar{x}\in R^n$ 为 (P) 的局部有效解,$t\in(1,+\infty)$,则存在不全为零的 $(\rho,\lambda,\mu)\in R^m\times R^p\times R^q$ 使(1)式成立,且

$$(\lambda,\mu)\in\mathrm{Cone}\ \partial|_H\|g_+(\bar{x}),h(\bar{x})\|_t\tag{7}$$

证明:因 $\bar{x}$ 是 (P) 的局部有效解,从而也是下面单约束问题

$$\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\ \|g_+(x),h(x)\|_t\leqslant 0\end{cases}$$

的局部有效解.由引理 3,存在 $\rho\geqslant 0,\sigma\geqslant 0,|(\rho,\sigma)|=1$ 使

$$0 \in \partial f(\bar{x})\rho + \sigma \partial|_{F^c} \| g_+ (x), h(x) \|_t \qquad (8)$$

由引理 2,存在$(\beta,\gamma) \in \partial|_{F^c} \| g_+ (\bar{x}), h(\bar{x}) \|_t$使

$$O \in \partial f(\bar{x})\rho + \sigma[\partial g(\bar{x}), \partial h(\bar{x})](\beta,\gamma) \qquad (9)$$

因为$H \subsetneqq A$,故$\partial|_H \| g_+, h \|_t \subseteq \partial|_A \| g_+, h \|_t$.又由引理 1 的$(i)$知$O \notin \partial|_A \| g_+, h \|_t$,从而$O \notin \partial|_H \| g_+, h \|_t$,故$(\beta,\gamma) \neq 0$.取$(\lambda,\mu) = \sigma(\beta,\gamma)$并由(9)式即得结论.证毕.

附注 1 从引理 3 和定理 1 的证明知,若$\bar{x} \in \mathring{F}$,则定理 1 中的σ必需取为零.

附注 2 由引理 1 的(ii)知 Cone $\partial|_H \| g_+ (\bar{x}), h(\bar{x}) \|_t \subseteq \mathcal{L}(\bar{x})$,故任意满足条件(1)和(7)的点必定满足$F-J$条件(1)和(2).但反过来不一定成立(见下面的例 2).

例 1(续),由于$\bar{x} \in \mathring{F}$,由附注 1 知,定理 1 的必要条件归结为(3),这是一个比较合理的结果.

例 2 考虑问题

$$\begin{cases} \min f(x) = [f_1(x), f_2(x)] = [\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + x_2, x_2] \\ s.t.\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0 \\ \quad\ \ g_2(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

显然$\bar{x} = (1,0)$为可行点但不是有效解.然而取$(\rho,\lambda,\mu) = (0,0,1,1)$,$F-J$必要条件满足.但易证:$\partial|_A \| g_+ (\bar{x}), h(\bar{x}) \|_2 = \{(1,0), (0,1)\}$,$Cone\ \partial|_H \| g_+ (\bar{x}), h(\bar{x}) \|_2 = \{(\alpha,0), (0,\alpha) | \alpha \geqslant 0\}$,从而对$\bar{x}$,条件(1)和(7)不成立.

因此,最优性必要条件(1)和(7)比$F-J$必要条件更强且更合理.

下面讨论$K-T$必要条件,为此引入如下的(CQ_t)条件:$O \notin \partial|_{F^c} \| g_+ (x), h(x) \|_t$.它是由 Dipillo 在文献[4]中首先提出的.文献[1]的命题 3.1 论证了它是一个比$M-F$约束规格弱的约束规格.

定理 2 在(CQ_t)条件下,定理 1 中的$\rho \neq 0$.

证明:若$\rho = 0$,则类似于定理 1 的证明,可证此时(8)式仍然成立,即

$$O \in \sigma\partial|_{F^c} \| g_+ (\bar{x}), h(\bar{x}) \|_t \quad 且\ \sigma = 1$$

这与(CQ_t)条件矛盾.故$\rho \neq 0$.证毕.

总之,本文所提出的$F-J$和$K-T$必要条件包含了通常的$F-J$和$K-T$必要条件,它有助于改进已有的许多算法,减少计算量,因而有理论与现实意义.另一方面,当$m=1$(即单目标规划情形)时,由本文的结论亦可得文献[1]的相应结果,因此本文是对文献[1]的推广和进一步讨论.

参考文献

1 Facchinei F., Refinements of necessary conditioms for optimality in nonlinear programming, JOTA, 73: 1 (1992), 65~74

2 Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis, John Wiley & Sons, New York, 1983

3 Rockafelar R T., Convex analysis, New York: Princeton University Press, 1970

4 Dipillo G, Facchinei F. Exact penaty functions for nondifferentiable programming problems, nonsmooth optimization and related topics, edited by Clarke F H, Demyanov V F, Giannessi F, New York: Plenum Press, 1989, 89~107

(责任编辑:蒋汉明、邓大玉)