DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.01.001
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (1): 3~5, 21

毛虫图的带宽
Bandwidths of Caterpillar-Graphs

麦结华*
Mai Jiehua

(广西大学数学研究所 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Institute of Math., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 求出毛虫图的带宽的计算公式并给出一个较简洁的证明.讨论了此带宽公式的计算复杂性问题,提出一种更简单的算法.

关键词 树 毛虫图 广义标号 带宽

Abstract A formula of the bandwidths of caterpillar-graphs with a simpler prood is abtained. Moreover, we discuss the problem of computational complexity of this bandwidth formula and raise a simpler algorithm.

Key words tree, caterpillar-graph, general labelling, bandwidth

图的带宽问题是文献 [1] 的最后所列举的几十个图论问题之一.这个问题与计算数学中大型稀疏对称矩阵的带宽最小化问题实质上等价,因而有它的应用背景.由于一般的图的带宽的计算是个十分困难的NP-完全问题[2],所以目前能求出带宽的准确值的仍只有一些特殊类型的图[3~11].树是图之中极其重要也相当广泛的一类,人们希望能求出树的带宽[4],但遗憾的是一般的树的带宽的计算也是个NP-完全问题[12].因此,比较可行的途径是先考虑一些特殊类型的树,先解决特殊再逐渐走向一般.

在树的各种类型之中,毛虫图是较为基本较为重要的一类.文献 [13] 及文献 [14] 在介绍优美图及在讨论图的轮廓 (profile) 时均涉及到了毛虫图.毛虫图的带宽问题也已被多次考虑过. Syslo及 Zak[15] 考虑了一类特殊的毛虫图,即有序的毛虫图,求出了此类图 (包括其特例双星图及梳子图) 的带宽.文献 [6] 238-239页介绍了文献 [15] 的结果.文献 [16]更正了文献 [6] 239页中双星带宽公式的错误,另给出了正确的计算公式.

本文将考虑最一般的毛虫图 T.运用广义标号的概念,我们较简便地给出了 T上的带宽达到最小的标号,得出了 T的带宽的便于使用的计算公式,并得到了某些进一步的结果.

1 标号、广义标号及带宽的概念

以 Z_+ 表示正整数的集合.对整数 $i<j$,记 $Z[i,j]=\{i,i+1,\cdots,j\}$.又记 $Z_n=\{1,\cdots,n\}$.此外,本文还将使用文献 [4]及 [6]中的一些记号,如 $|S|$ 及 $[r]$ 等.

定义 1 设 G是个图,$|V(G)|=n$,则任一个单的映射 $h: V(G)\to Z_+$ 均称为 G上 (顶点)的一个广义标号.令 $B(h)=B_G(h)=\max\{|h(u)-h(v)|: uv\in E(G)\}$.称 $B(h)$ 为 h的带宽.当 $h(V(G))=Z_n$时,h即是通常的标号.令 $B(G)=\min\{B(f): f$ 是 G上的标号$\}$,称 $B(G)$ 为图 G的带宽.文献 [6]225页已指出,如此定义的 $B(G)$ 与 $B'(G)\equiv\min\{B(h): h$是 G上的广义标号$\}$ 相等.

2 毛虫图的带宽

定义 2 设 T是个树.若将 T的端点 (又称下垂顶点,均指度为 1的顶点) 移走之后所剩下的图是条路 (本文不妨只限于非空的路) P,则称 T是个毛虫 (或毛虫图).(参看文献 [6]238页或文献 [13]25页).

称定义 2中的路 P为毛虫 T的骨干路.不妨假定 P的顶点数为 $n(\geqslant 1)$,且 $P=v_1v_2\cdots v_n$.设顶点 v_i 的度数为 $d(v_i)$,记 $\lambda_i=d(v_i)-2$ $(i\in Z_n)$,则 $\lambda_i\geqslant 0$.当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均为 0时,T其实是条路.因此,下面不妨假

1995-10-04收稿.

* 现在通信地址: 广东汕头大学数学研究所, 515063

定 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$.称序列 $L \equiv (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 T 的特征序列,同时称 T 是个 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$–毛虫或 L–毛虫.不妨设 T 中与 v_i 相邻的那 $\lambda_i + 2$ 个顶点为 $v_{i-1}, w_{i1}, w_{i2}, \cdots, w_{i\lambda_i}, v_{i+1}$(任 $i \in Z_n$).令 $w_{i0} = v_{i-1}$.

对上述毛虫 T 及整数 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$,令 T_{ij} 为 T 的由顶点集 $\bigcup_{k=i}^{j} \{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, w_{k1}, w_{k2}, \cdots, w_{k\lambda_k}\}$ 导出的子图.称 T_{ij} 为 T 的一个正则子毛虫.显然 $T_{1n} = T$.此外我们令 $T_{10} = \{v_0, v_1; v_0 v_1\}$, $T_{n+1,n} = \{v_n, v_{n+1}; v_n v_{n+1}\}$.容易看出,$T_{ij}$ 的顶点数 $|V(T_{ij})| = j - i + 3 + \Sigma_{k=i}^{j} \lambda_k$, T_{ij} 的直径(文献[1]14页)$D(T_{ij}) = j - i + 2$.记 $U_{ij}(T) = [(|V(T_{ij})| - 1)/D(T_{ij})]$.据一个熟知的带宽下界公式(见文献[4]278页或文献[6]230页)可得

$$B(T_{ij}) \geqslant U_{ij}(T). \tag{1}$$

对上述特征序列

$L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 及 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$,令

$$b_{ij}(L) = \Sigma_{k=i}^{j} \lambda_k / (j - i + 2), \tag{2}$$

又令 $b(L) = \max\{b_{ij}(L): 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.注意到

$$U_{ij}(T) = 1 + [b_{ij}(L)], \tag{3}$$

且 $B(T) \geqslant \max\{B(T_{ij}): 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$,由(1)式可得

引理 1 $B(T) \geqslant 1 + [b(L)]$.

定理 1 设 T, L 等各记号如上述,记 $U = U(L) \equiv [b(L)] + 1$,则存在 T 上的广义标号 $f = f_n$ 满足

(i) $f(v_i) = 1 + iU$, $(i = 0, 1, \cdots, n+1)$;

(ii) 对任 $i \in Z_n$ 均有 $f(w_{i\lambda_i}) < 1 + U + iU (= f(v_{i+1}))$;

(iii) 令 $Z_0 = \varnothing$,记 $a_i = \max\{f(u): u \in V(T_{1,i-1}) - \{v_i\}\}$,则对任 $i \in Z_n$ 均有

$$f(w_{ik}) = \begin{cases} a_i + k & \text{若 } k \in Z_{\lambda_i} \text{ 且 } k < f(v_i) - a_i; \\ a_i + k + 1 & \text{若 } k \in Z_{\lambda_i} \text{ 且 } k \geqslant f(v_i) - a_i. \end{cases} \tag{4$_i$}$$

证 当 $n = 1$ 时,作映射 $f = f_1: V(T) \to Z_+$ 为 $f(v_i) = 1 + iU (i = 0, 1, 2)$, $f(w_{ij}) = 1 + j$(任 $j \in Z_{\lambda_1} \cap Z_{U-1}$), $f(w_{1k}) = 2 + k$(任 $k \in Z_{\lambda_1} - Z_{U-1}$).注意到 $U = [b_{11}(L)] + 1 \geqslant b_{11}(L) + 1 = 1 + \lambda_1/2$,可知 $f(w_{1\lambda_1}) \leqslant 2 + \lambda_1 \leqslant 2U < f(v_2)$.据此易验 f 是个单映射并满足定理中的各个条件.

下面假定 $n > 1$,并且假定已作出满足定理 1中的各个相应的条件的 $T_{1,n-1}$ 上的广义标号 f_{n-1}.我们在 f_{n-1} 的基础上作映射 $f = f_n: V(T) \to Z_+$ 为

① $f|V(T_{1,n-1}) = f_{n-1}$,且 $f(v_{n+1}) = 1 + (n+1)U$;

② $f(w_{nk})$ 由 $(4)_n$ 式定义(任 $k \in Z_{\lambda_n}$).

按照 f 的这一定义及关于 f_{n-1} 的归纳假设,如果我们能够证明 $f(w_{n\lambda_n}) < 1 + (n+1)U$,则 f 便是个单映射(从而是个广义标号),并且 f 便自动满足定理 1中的各个条件.因此,下面我们只需证明

$$f(w_{n\lambda_n}) < 1 + (n+1)U. \tag{5}$$

为此我们注意到,存在着唯一的 $i \in Z_n$ 使得

$$a_i \equiv \max\{f_{n-1}(u): u \in V(T_{1,i-1}) - \{v_i\}\} = f_{n-1}(v_{i-1}), \tag{6}$$

且对任 $j \in Z_n - Z_i$ 均有

$$a_j \equiv \max\{f_{n-1}(u): u \in V(T_{1,j-1}) - (v_j)\} > f_{n-1}(v_{j-1}) \tag{7}$$

因 f_{n-1} 满足定理 1中的各相应条件,据(6)及(7)式易知

$$f_{n-1}(V(T_{i,n-1})) \supset Z[f_{n-1}(v_{i-1}), f_{n-1}(v_{n-1})] \tag{8}$$

由(8)式及 f 的定义则可推出

$$f(V(T_{in}) - \{v_{n+1}\}) \supset Z[f_{n-1}(v_{i-1}), f(W_{n\lambda_n})] \tag{9}$$

由(9)式可得

$$n - i + 2 + \Sigma_{j=i}^{n} \lambda_j = |V(T_{in}) - \{v_{n+1}\}| \geqslant f(w_{n\lambda_n}) - f(v_{i-1}) + 1. \tag{10}$$

另一方面,据 $U = U(L) = 1 + [b(L)]$ 及(2)式可得

$$U \geqslant 1 + b(L) \geqslant 1 + b_{in}(L) = 1 + (\lambda_i + \cdots + \lambda_n)/(n - i + 2) \tag{11}$$

由(10)及(11)式得 $U \geqslant [f(w_{n\lambda_n}) - f(v_{i-1}) + 1]/(n - i + 2)$,推出 $f(w_{n\lambda_n}) \leqslant (n - i + 2)U + f(v_{i-1}) - 1 = (n+1)U < 1 + (n+1)U$.定理 1证完.

定理 2 设 T 是个 L–毛虫,$L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.又设 $b(L) = \max\{b_{ij}(L): 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ 如上述,则 $B(T) = 1 + [b(L)]$.

证 取广义标号 f 如定理 1所述.由该定理中的三个性质易看出 $B(f) = f(v_{i+1}) - f(v_i) = U = 1 + [b(L)]$,(任 $i \in Z_n$).据引理 1即得出 $B(T) \geqslant 1 + [b(L)] = B(f) \geqslant B(T)$.

3 进一步的结果

毛虫图被它的特征序列 L 唯一地决定.给出毛虫图 T 的结构等价于给出它的特征序列 L.根据定理 2,T 的带宽的计算几乎等同于函数值 $b(L)$ 的计算.从计算复杂性的角度来看,我们即使依一定的次序(例如,依 $b_{11}(L), b_{12}(L), \cdots, b_{nn}(L)$ 这一次序)计算出所有的 $b_{ij}(L)$ 之后再求出其最大值 $b(L)$,所需的基本运算次数也不超过 n^2 的某一常数倍.因此,根据定

理 2给出的公式可以得到计算带宽 $B(T)$ 的有效的(即“好的”)算法[17].

下面我们将探讨是否还有更好的算法,不需要计算出所有的 $b_{ij}(L)$ 即可求得 $b(L)$.

仍设 $L=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 等各记号如上节所述.对 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$,令 $\text{\_}_{ij}(L)=(\lambda_i+\cdots+\lambda_j)/(j-i+1)$,则 $\text{\_}_{ij}(L)$ 为 $\lambda_i,\cdots,\lambda_j$ 的算术平均值,且 $\text{\_}_{ij}(L)=[1+1/(j-i+1)]b_{ij}(L)\geqslant b_{ij}(L)$. 又令 $\text{\_}_{10}(L)=\text{\_}_{n+1,n}(L)=\text{\_}_{1n}(L)$.

引理 2 设 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$,则

(i) $b_{in}(L)>b_{1n}(L)$ 的充要条件是 $\text{\_}_{1,i-1}(L)<b_{1n}(L)$;

(ii) $b_{1j}(L)>b_{1n}(L)$ 的充要条件是 $\text{\_}_{j+1,n}(L)<b_{1n}(L)$.

证 注意到 $b_{in}(L)=[(n+1)b_{1n}(L)-(i-1)\text{\_}_{1,i-1}(L)]/(n-i+2)$,可知引理 2的结论(i)成立.据对称性,结论(ii)也成立.

引理 3 设 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$.若 $b_{ij}(L)>b_{1n}(L)$,则 $\min\{\text{\_}_{1,i-1}(L),\text{\_}_{j+1,n}(L)\}<b(L)$.

证 注意到 $(i-1)\text{\_}_{1,i-1}(L)+(n-j)\text{\_}_{j+1,n}(L)=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)-(\lambda_i+\cdots+\lambda_j)=(n+1)b_{1n}(L)-(j-i+2)b_{ij}(L)$,可知引理 3成立.

由引理 2及 3可推出如下的命题及定理:

命题 1 $b(L)=b_{1n}(L)$ 的充要条件是

(C. 1) $\min\{\text{\_}_{1i}(L),\text{\_}_{in}(L):i\in Z_n\}\geqslant b_{1n}(L)$.

定理 3 若条件(C. 1)成立,则 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$-毛虫 T 的带宽 $B(T)=1+[b_{1n}(L)]=1+[(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)/(n+1)]$.

推论 1 若(i) $\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\geqslant b_{1n}(L)$,或者(ii) $\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\geqslant\dfrac{n}{n+1}\max\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,则 $B(T)=1+[b_{1n}(L)]$.

证 条件(ii)蕴含(i),而条件(i)蕴含条件(C. 1).

引理 8 若存在 $m\in Z_n$ 使得下面的条件(C. 2)或(C. 3)成立,则对任 $i\in Z_m$ 及任 $j\in Z[m,n]$ 均有 $b_{ij}(L)<b(L)$:

(C. 2) $\text{\_}_{1m}<b_{1n}(L)$,且对任 $k\in Z_{m-1}$ 均有 $\text{\_}_{1k}(L)\geqslant b_{1n}(L)$.

(C. 3) $\text{\_}_{mn}<b_{1n}(L)$,且对任 $k\in Z_n-Z_m$ 均有 $\text{\_}_{kn}(L)\geqslant b_{1n}(L)$.

证 据对称性,不妨只考虑条件(C. 2)成立的情形.对任 $i\in Z_m$ 及 $j\in Z[m,n]$,若 $b_{ij}(L)<b_{1n}(L)$,自然有 $b_{ij}(L)<b(L)$. 若 $b_{ij}(L)\geqslant b_{1n}(L)$,则由 $\text{\_}_{1,i-1}(L)\geqslant b_{1n}(L)>\text{\_}_{1m}(L)$ 可推出 $\text{\_}_{im}(L)<b_{1n}(L)\leqslant b_{ij}(L)<\text{\_}_{ij}(L)$,从而 $j>m$.将引理 2用于序列 $L'\equiv(\lambda_i,\cdots,\lambda_j)$,亦可得

$$b_{ij}(L)=b_{1,j-i+1}(L')<b_{m-i+2,j-i+1}(L')$$
$$=b_{m+1,j}(L)\leqslant b(L).$$

由引理 8可得出如下的命题及定理:

命题 2 若上述条件(C. 2)或(C. 3)对某 $m\in Z_n$ 成立,则当 $m=1$ 时有 $b(L)=b(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,当 $m=n$ 时有 $b(L)=b(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$,当 $1<m<n$ 时有

$$b(L)=\max\{b(\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}),b(\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n)\}.$$

定理 4 若上述条件(C. 2)或(C. 3)对某 $m\in Z_n$ 成立,则上述毛虫 T 的带宽 $B(T)=\max\{B(T_{1,m-1}),B(T_{m+1,n})\}$

注意到条件(C. 1)不成立时条件(C. 2)或(C. 3)必对某 $m\in Z_n$ 成立,据命题 1及命题 2我们可以给出一个从 $L=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 求出 $b(L)$(从而求出带宽 $B(T)$)的计算量更小一些的算法,此算法不必把所有的 $b_{ij}(L)$ 都计算出来.

注 1 文献[18]也求出了毛虫图的带宽. 但本文借助于广义标号,证明方法比文献[18]简洁. 此外,本文第 3节的内容也是文献[18]所没有的.

参考文献

1 Bondy J A, Murty USR, Graph Theory with Applications, London Macmillan Press, 1976.

2 Papadimierou C H, Computing, 1976, 16: 263~270.

3 Chvatalova J, Discrete Mathematics, 1975, 11: 249~253.

4 Dewdney A K, Proc 7th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1976: 273~288.

5 李 乔,陶懋颀,沈韵秋.合肥:中国科学技术大学学报,1981, 11(1): 1~16.

6 Chinn P Z et al., J Graph Theory, 1982, 6: 223~254.

7 张忠辅,姚 兵,谢继图.关于图的带宽.数学杂志,1983, 3: 323~329.

8 麦结华.球面上 n 条经线所构成的图的带宽.数学研究与评论, 1983, 3: 55~60.

9 麦结华,罗海鹏.关于图的带宽的一些定理.应用数学学报, 1984, 7: 86~95.

10 Mai Jiehua, Kexue Tongbao, 1984, 29: 1575~1578.

11 刘玉敏,林诒勋,徐济超.球面经纬线网络的带宽.数学季刊, 1990, 5: 45~62.

12 Garey M R et al., SIAM. J Appl. Math, 1978, 34: 477~495.

13 Bermond J C, Graceful graphs, radio antennae and French Windmills, 18~37.

(下转第 21页 Continue on page 21)

图 12 在混沌区的目标瞄准图
Fig. 12 Targets at chaos area

图 13 在分岔区的目标瞄准图
Fig. 13 Targets at bifurcation area

图 14 在分岔区的目标瞄准图
Fig. 14 Targets at bifurcation area

从上面二例知道,调多参数能较好地引导失稳轨道到达目标.

6 结束语

本文以二维三参数模型的一周期为例,把调参数法从调一参数推广到调多参数,以此改变相体积变化率和 Lyapunov 指数,在分岔区、混沌区实现对失稳周期控制和引导失稳轨道到达目标.从上面的讨论知道,多参数远比一参数复杂,但是调多参数的优点也是很明显的,它既可扩大控制范围,增强系统抗干扰性,还能在目标瞄准时调一参数失效的情形下,实现失稳轨道目标.因此,从调一参数推广到调多参数是一项很有意义的工作,本文的讨论是初步的,还有许多开创性的工作去做.

参考文献

1 Ott E, Grebogi C, York J A. Phys Rev Lett, 1990, 64 (11): 1196.
2 Shinbrot T, Ott E, Grebogi C, Yorke J A, phys Rev Lett, 1990, 65 (26): 3215.
3 Tan Yi, He Xingtu, Chen Shingang, Chine Phys Lett, 1993, 10 (6): 321.
4 Ni Wansun. Chinese Phys Lett, 1986, 3 (12): 573.
5 倪皖荪,童培庆,郝柏林.物理学报,1985, 34 (4): 503.
6 Hao Bailin. Progress in Physics, 1983, 3 (3): 329.
7 Ni Wansun. Chinese Phys Lett, 1994, 11 (6): 325.
8 Helleman. R M G. Fandamental Problems in Statistic, 1980, 5: 165.
9 Hu Guang, He Kaifen. Phys Rev Lett, 1994, 71 (23): 3794.
10 Hu Guang, Qu Zhilin, Phys Rev Lett, 1994, 72 (1): 68.
11 Kapita Niak T. Chaos, Solitons Practal, 1992, 2 (5): 519.

(责任编辑 蒋汉明 邓大玉)

(上接第 5页 Continue from page 5)

14 Lin Yixun, Yuan Jinjing, Minimum profile of grid networks in structure analysis, Systems Science and Mathematical Sciences. (to appear).
15 Syslo, M M, Zak J, The bandwidth problem for orderd caterpillars, Computer Science Department Report CS-80-065, Washington State University, 1980.
16 姚 兵,王建方,刘儒英.双星的带宽.青海师范大学学报, 1990, (1): 13~16.
17 王树乔.图论及其算法.合肥:中国科学技术大学出版社, 1990. 266.
18 Lin, Yixun, A level structure approach on the bandwidth problem for special graphs, Graph Theory and Its Applications: East and West, ANN N Y ACAD SCI, 1989, 576: 344~357.

(责任编辑 蒋汉明)