DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.01.003
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (1): 9～12

论余新河-哥德巴赫素数定理*

On the Yu-Goldbach Prime Theorem

蒋春暄 Jiang Chunxuan
(北京 3924信箱 100854)
(Beijing P. O. Box 3924, 100854)

梁炳贵** Liang Bingui
(北京航空航天大学二系 北京海淀区学院路 37号 100083)
(Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, 37 Xueyuan Road, Beijing, 100083)

摘要 利用数论函数 $h_2(k)$, 证明了余新河数学题和哥德巴赫猜想。

关键词 数论函数 余新河数学题 哥德巴赫猜想

Abstract The Yu math problem and Goldbach conjecture are proved using the arithmetic function $h_2(k)$.

Key words arithmetic function, Yu math problem, Goldbach conjecture

定义 我们定义广义余新河方程[1-5]

$$E_{p_T}(K) = kK + p_T \quad (1)$$

其中 $K = 0, 1, 2, \cdots$, $k = \prod_{2 \leqslant p \leqslant p_i} p$, $(k, p_T) = 1$, $p_i < p_T = p_1, \cdots, p_{h_1(k)} = k + 1$,为了计算方便,用 $k + 1$代替 1, $h_1(k) = \prod_{2 \leqslant p \leqslant p_i}(p - 1)$ 是 Euler函数. $E_{p_T}(K)$ 可以形成除因子为 $2, 3, \cdots, p_i$ 的数以外所有素数和合数,下面用 K 定义素数和合数.

定理 存在无限多个素数 p 使得 $ap + b$ 也是素数,它必须满足以下三个充分和必要条件:

(Ⅰ) $ab \neq 0$, $2 \nmid ab$, $(a, b) = 1$, $ap + b$ 是不可约的.

(Ⅱ) 存在一个数论函数 $h_2(k)$,它表示

$$(ap_T + b, k) = 1 \quad (2)$$

解的个数,也表示子方程的个数,即 p_T 的个数,从 (2) 式定义 $h_2(k)$ 可以表示为

$$h_2(k) = \sum_{T=1}^{h_1(k)} \left[\frac{1}{(ap_T + b, k)}\right] = \prod_{3 \leqslant p \leqslant p_i}(p - 2 - i(p)) \neq 0, \; i(p) = -1, 0. \quad (3)$$

$h_1(k) \geqslant h_2(k)$,它是 $h_1(k)$的推广.如 $h_2(k) \neq 0$,那末有无限多个素数 p 使得 $ap + b$ 也是素数.引入 $h_2(k)$ 可以获得解的个数精确公式.

(Ⅲ) t_T 与 p_T 无关, t_T 表示在 $aE_{p_T}(K_p) + b =$ 素数中小于 n 素数 K_p 的个数,取 $t_1 = t_T$,其中 $T = 1, \cdots, h_2(k)$ 我们有

$$T_N = |\{p: p \leqslant N, ap + b = p'\}| = \sum_{T=1}^{h_2(k)} t_T = h_2(k) t_1 + \text{误差项} \quad (4)$$

$h_2(k)$ 越大, T_N 越精确,误差项可以忽略.

首先我们讨论一个子方程 $aE_{p_1}(K) + b = p''$,从 $E_{p_1}(K)$ 定义数列

$$K = 0, 1, \cdots, n.$$

我们取平均值,

$$t_1 = |\{K_p: K_p \leqslant n, aE_{p_1}(K_p) + b = p''\}| = \frac{[c_1(kn)]^2}{n} + \text{误差项}, \quad (5)$$

其中 $c_1(kn)$ 表示在 $E_{p_1}(K)$ 中素数 K 的个数,我们证明了 t_1 与 p_1 无关.

设 $N = kn$ 和 $c_1(N) = \frac{N}{h_1(k)\log N} +$ 误差项,把它们代入 (5) 式,而后把 t_1 代入 (4) 式,我们有

$$T_N = |\{p: p \leqslant N, ap + b = p'\}| = \frac{h_2(k) k}{h_1^2(k)} \frac{N}{\log^2 N}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right\}. \quad (6)$$

如用 $[c(N)]^2/N$ 代替 $N/\log^2 N$, O 符号可以忽略,它

1995-12-05收稿。

* 首届全国《余新河数学题》研讨会论文。 1995年 10月 28-30日 (福建师范大学)

** 广西桂林市阳朔县人 (编者注)。

的系数没有误差[5].条件(III)只是保证推导出 $ap+b=p'$ 解的个数精密渐近公式,(I)和(II)保证 $ap+b=p'$ 有无限多个素数解的充分条件.

因为 $\sigma_2(\omega)\neq 0$,从(6)我们有 $ap+b=p'$ 的素数定理[5]

$$\lim_{N\to\infty}\frac{T_N\,\phi^2(\omega)\log^2 N}{\sigma_2(\omega)\,\omega N}=1. \tag{7}$$

从(2)式我们有

$$ap_T+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),\ 2<p\leqslant p_i<p_T. \tag{8}$$

每个 $p_T>p$ 可以表示为

$$p_T=pl+q, \tag{9}$$

其中 $q=\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm(p-1)/2$.把(9)式代入(8)式我们有

$$aq+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,p). \tag{10}$$

如 $p|ab$,(10)式无解,我们定义 $\chi(p)=-1$;如 $p\nmid ab$,(10)式只有一个解定义 $\chi(p)=0$.把它们代入(3)式我们有

$$\sigma_2(\omega)=\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}(p-2)\prod_{\substack{p|ab\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}\neq 0. \tag{11}$$

把(11)式代入(6)式我们有[4],

$$T_N=|\{p:p\leqslant N,ap+b=p'\}|$$
$$=2\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|ab\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}$$
$$\times\frac{N}{\log^2 N}\left[1+O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right]. \tag{12}$$

因为 $\sigma_2(\omega)\neq 0$,有无限多个素数 p 使得 $ap+b$ 也是素数.

孪生素数问题　设 $a=1$ 从(12)式我们有[4]

$$T_N=|\{p:p\leqslant N,\ p+b=p'\}|$$
$$=2\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|b\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}$$
$$\times\frac{N}{\log^2 N}\left[1+O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right],2|b. \tag{13}$$

孪生素数数论函数是

$$\sigma_2(\omega)=\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}(p-2)\prod_{\substack{p|b\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}\neq 0 \tag{14}$$

因为 $\sigma_2(\omega)\neq 0$,有无限多个素数 p 使得 $p+b$ 也是素数.

哥德巴赫问题　设 $a=-1$ 和 $b=N$ 从(12)式我们有[2~5]

$$T_N=|\{p:p\leqslant N,\ N-p=p'\}|$$
$$=2\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}$$
$$\times\frac{N}{\log^2 N}\left[1+O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right],2|N. \tag{15}$$

哥德巴赫数论函数是

$$\sigma_2(\omega)=\prod_{3\leqslant p\leqslant p_i}(p-2)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant p_i}}\frac{p-1}{p-2}\neq 0. \tag{16}$$

因为 $\sigma_2(\omega)\neq 0$,每个大于4的偶数是两个素数之和.

第一类余新河数学题[3~5]　设 $p_i=5$ 和 $\omega=30$,从(1)式我们有余新河方程

$$E_{p_T}(K)=30K+p_T, \tag{17}$$

其中 $K=0,1,2,\cdots,p_T=7,11,13,17,19,23,29,31$.由 $N=30m+h$,其中 $m=0,1,2,\cdots,h=18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46$,可以形成大于16的所有偶数,从(17)式我们有

$$N=E_{p_1}(K_1)+E_{p_2}(K_2)=30m+h, \tag{18}$$

其中 $E_{p_1}(K_1)$ 和 $E_{p_2}(K_2)$ 是两个素数.从(18)式我们有

$$m=K_1+K_2,\quad h=p_1+p_2, \tag{19}$$

其中 K_1 和 K_2 是两个素数.

第一类余新河数学题是在(19)式中 $m=K_1+K_2$,其中 $m=1,2,3,\cdots,K_1$ 和 K_2 是两个素数.要直接证明它们是非常困难的.从(18)式和(19)式我们得出 $m=K_1+K_2$ 解的个数等于 $N=E_{p_1}(K_1)+E_{p_2}(K_2)$ 解的个数.研究 $m=K_1+K_2$ 转变为研究 $N=E_{p_1}(K_1)+E_{p_2}(K_2)$.

$3|N$, $\sigma_2(30)=6$,例如 $p_T=7,11,17,31,19,29$,从(18)式我们有

$$N=E_7(K_1)+E_{11}(K_2)=E_{17}(K_1)+E_{31}(K_2)$$
$$=E_{19}(K_1)+E_{29}(K_2)=30m+8,$$
$$N=E_7(K_1)+E_{17}(K_2)=E_{11}(K_1)+E_{13}(K_2)$$
$$=E_{23}(K_1)+E_{31}(K_2)=30m+24,$$
$$N=E_7(K_1)+E_{29}(K_2)=E_{13}(K_1)+E_{23}(K_2)$$
$$=E_{17}(K_1)+E_{19}(K_2)=30m+36,$$
$$N=E_{11}(K_1)+E_{31}(K_2)=E_{13}(K_1)+E_{29}(K_2)$$
$$=E_{19}(K_1)+E_{23}(K_2)=30m+42. \tag{20}$$

$5|N$, $\sigma_2(30)=4$,例如 $p_T=7,13,19,31$,从(18)式我们有

$$N = E_7(K_1) + E_{13}(K_2)$$
$$= E_{19}(K_1) + E_{31}(K_2) = 30m + 20,$$
$$N = E_{11}(K_1) + E_{29}(K_2)$$
$$= E_{17}(K_1) + E_{23}(K_2) = 30m + 40. \quad (21)$$

$3, 5 \nmid N$, $h_2(30) = 3$,例如 $p_T = 11, 23, 29$,从 (18) 式我们有

$$N = E_{23}(K_1) + E_{29}(K_2)$$
$$= E_{11}(K_1) + E_{11}(K_2) = 30m + 22,$$
$$N = E_7(K_1) + E_{19}(K_2)$$
$$= E_{13}(K_1) + E_{13}(K_2) = 30m + 26,$$
$$N = E_{11}(K_1) + E_{17}(K_2)$$
$$= E_{29}(K_1) + E_{29}(K_2) = 30m + 28,$$
$$N = E_{13}(K_1) + E_{19}(K_2)$$
$$= E_{31}(K_1) + E_{31}(K_2) = 30m + 32,$$
$$N = E_{11}(K_1) + E_{23}(K_2)$$
$$= E_{17}(K_1) + E_{17}(K_2) = 30m + 34,$$
$$N = E_7(K_1) + E_{31}(K_2)$$
$$= E_{19}(K_1) + E_{19}(K_2) = 30m + 38,$$
$$N = E_{13}(K_1) + E_{31}(K_2)$$
$$= E_7(K_1) + E_7(K_2) = 30m + 44,$$
$$N = E_{17}(K_1) + E_{29}(K_2)$$
$$= E_{23}(K_1) + E_{23}(K_2) = 30m + 46. \quad (22)$$

$3, 5 | N$, $h_2(30) = 8$, $p_T = 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$,从 (18) 式我们有

$$N = E_7(K_1) + E_{23}(K_2) = E_{11}(K_1) + E_{19}(K_2)$$
$$= E_{13}(K_1) + E_{17}(K_2)$$
$$= E_{29}(K_1) + E_{31}(K_2) = 30m + 30, \quad (23)$$

其中 $E_{p_1}(K_1)$ 和 $E_{p_2}(K_2)$ 是两个素数, K_1 和 K_2 也是两个素数.数论函数 $h_2(30)$ 精确地确定 p_T 的个数.

在 (23) 式中有 4个子方程,因为 N 相等 m 也相等. 4个子方程解的个数也相等,只讨论其中一个子方程就够了,例如 $N = E_7(K_1) + E_{23}(K_2)$. (20), (21) 和 (22) 式也是这样.这样在 (20)—(23) 式中,只有 15个不同子方程,它对应 15个 $N = 30m + h$ 方程,也对应 15个 $m = K_1 + K_2$ 方程.从 (16) 式我们得出每个子方程数论函数是

$$h_2(30) = 2, \quad h_2(k > 30)$$
$$= \prod_{7 \le p \le p_i}(p - 2)\prod_{\substack{p|N \\ 7 \le p \le p_i}}\frac{p-1}{p-2} \neq 0. \quad (24)$$

从 (6) 式推导出哥德巴赫问题公式 (15), (6) 式也适用于哥德巴赫问题的子方程,只是数论函数不同.把 $h_2(k > 30)$ 代入 (6) 式我们有 [3~5]

$$T_N = \sum_{m = K_1 + K_2} 1 = \sum_{N = K_{p_1}(K_1) + K_{p_2}(K_2)} 1$$
$$= \frac{15}{32}\prod_{7 \le p \le p_i}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N \\ 7 \le p \le p_i}}\frac{p-1}{p-2}$$
$$\times \frac{N}{\log^2 N}\left[1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right], \quad (25)$$

其中 $E_{p_1}(K_1)$ 和 $E_{p_2}(K_2)$ 是两个素数, K_1 和 K_2 也是两个素数, $p_1 \neq p_2$.

因为 $h_2(k > 30) \neq 0$,每个大于 16的偶数是两个素数之和.因为 $N = E_{p_1}(K_1) + E_{p_2}(K_2)$ 解的个数等于 $m = K_1 + K_2$ 解的个数,我们也证明了 15个不同子方程 $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 1, 2, 3, \cdots$, K_1 和 K_2 是两个素数.这也证明了在 (20)—(23) 式中 28个子方程: $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 1, 2, 3, 4, \cdots$, K_1 和 K_2 是两个素数.

余新河数学题　它有 8个余新河方程 [6~8]

$$E'_7(K) = 30K - 23, \quad E'_{11}(K) = 30K - 19,$$
$$E'_{13}(K) = 30K - 17, \quad E'_{17}(K) = 30K - 13,$$
$$E'_{19}(K) = 30K - 11, \quad E'_{23}(K) = 30K - 7,$$
$$E'_{29}(K) = 30K - 1, \quad E'_{31}(K) = 30K - 29, \quad (26)$$

其中 $K = 1, 2, 3, \cdots$

$3 | N$, $h_2(30) = 6$,从 (26) 式我们有

$$N = E'_7(K_1) + E'_{11}(K_2) = E'_{17}(K_1) + E'_{31}(K_2)$$
$$= E'_{19}(K_1) + E'_{29}(K_2) = 30(m - 2) + 18,$$
$$N = E'_7(K_1) + E'_{17}(K_2) = E'_{11}(K_1) + E'_{13}(K_2)$$
$$= E'_{23}(K_1) + E'_{31}(K_2) = 30(m - 2) + 24,$$
$$N = E'_7(K_1) + E'_{29}(K_2) = E'_{13}(K_1) + E'_{23}(K_2)$$
$$= E'_{17}(K_1) + E'_{19}(K_2) = 30(m - 2) + 36,$$
$$N = E'_{11}(K_1) + E'_{31}(K_2) = E'_{13}(K_1) + E'_{29}(K_2)$$
$$= E'_{19}(K_1) + E'_{23}(K_2) = 30(m - 2) + 42. \quad (27)$$

$5 | N$, $h_2(30) = 4$,从 (26) 式我们有

$$N = E'_7(K_1) + E'_{13}(K_2)$$
$$= E'_{19}(K_1) + E'_{31}(K_2) = 30(m - 2) + 20,$$
$$N = E'_{11}(K_1) + E'_{29}(K_2)$$
$$= E'_{17}(K_1) + E'_{23}(K_2) = 30(m - 2) + 40. \quad (28)$$

$3, 5 \nmid N$, $h_2(30) = 3$,从 (26) 式我们有

$$N = E'_{23}(K_1) + E'_{29}(K_2)$$
$$= E'_{11}(K_1) + E'_{11}(K_2) = 30(m - 2) + 22,$$
$$N = E'_7(K_1) + E'_{19}(K_2)$$
$$= E'_{13}(K_1) + E'_{13}(K_2) = 30(m - 2) + 26,$$

$$N = E'_{11}(K_1) + E'_{17}(K_2)$$
$$= E'_{29}(K_1) + E'_{29}(K_2) = 30(m-2) + 28,$$
$$N = E'_{13}(K_1) + E'_{19}(K_2)$$
$$= E'_{31}(K_1) + E'_{31}(K_2) = 30(m-2) + 32,$$
$$N = E'_{11}(K_1) + E'_{23}(K_2)$$
$$= E'_{17}(K_1) + E'_{17}(K_2) = 30(m-2) + 34,$$
$$N = E'_{7}(K_1) + E'_{31}(K_2)$$
$$= E'_{19}(K_1) + E'_{19}(K_2) = 30(m-2) + 38,$$
$$N = E'_{13}(K_1) + E'_{31}(K_2)$$
$$= E'_{7}(K_1) + E'_{7}(K_2) = 30(m-2) + 44,$$
$$N = E'_{17}(K_1) + E'_{29}(K_2)$$
$$= E'_{23}(K_1) + E'_{23}(K_2) = 30(m-2) + 46. \qquad (29)$$

$3,5 | N$, $h_2(30) = 8$,从(26)式我们有

$$N = E'_{7}(K_1) + E'_{23}(K_2)$$
$$= E'_{11}(K_1) + E'_{19}(K_2)$$
$$= E'_{13}(K_1) + E'_{17}(K_2)$$
$$= E'_{29}(K_1) + E'_{31}(K_2)$$
$$= 30(m-2) + 30. \qquad (30)$$

其中 $E_{p_1}(K_1)$ 和 $E_{p_2}(K_2)$ 是两个素数,K_1和 K_2也是两个素数.(27)—(30)式和(20)—(23)式完全相同,第一类余新河数学题就是余新河数学题.余新河数学题只讨论在(27)—(30)式中 24个子方程[7],在(27)式中有 8个,在(28)式中有 4个,在(29)式中有 8个,在(30)式中有 4个.余新河猜想 24个子方程[6~8]: $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 2, 3, 4, \cdots$, K_1和 K_2是两个素数.同样在(27)—(30)式中只有 15个不同子方程对应 15个 $N = 30(m-2) + h$方程,也对应 15个 $m = K_1 + K_2$方程.(25)式也是余新河数学题解的个数渐近公式.因为 $h_2(k > 30) \neq 0$,每个大于 16的偶数是两个素数之和.因为 $N = E'_{p_1}(K_1) + E'_{p_2}(K_2)$解的个数等于 $m = K_1 + K_2$解的个数,我们证明了 15个不同子方程: $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 2, 3, \cdots$, K_1和 K_2是两个素数.这样我们也证明了余新河数学题中 24个子方程: $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 2, 3, \cdots$, K_1和 K_2是两个素数.同样我们也证明在(27)—(30)式中 28个子方程: $m = K_1 + K_2$,其中 $m = 2, 3, \cdots$, K_1和 K_2是两个素数.

在(7)中设 $h_2(k) = h_2(k > 30)$,我们获得余新河-哥德巴赫素数定理

$$\lim_{N\to\infty} \frac{T_N h_1^2(k) \log^2 N}{h_2(k > 30) kN} = 1, \qquad (31)$$

其中 $N = 30(m-2) + h = E'_{p_1}(K_1) + E'_{p_2}(K_2)$, $m = K_1 + K_2$, $m = 2, 3, \cdots$, K_1和 K_2是两个素数, $p_1 \neq p_2$.

在(1)式中设 $p_i = 7$我们可以建立第二类余新河数学题.设 $p_i = 11$为第三类余新河数学题…,同样我们可以证明余新河数学题,因为它们的数论函数不为零.

余新河数学题的意义已超过哥德巴赫问题.在研究余新河数学题中我们发现每个堆垒素数问题都有一个数论函数,用它可找到解的个数精确公式,从而建立了堆垒素数定理[5].利用数论函数可以攻克堆垒素数理论中所有问题.最后问题就是研究它的数论函数[9].这种数论函数可以应用于其他学科.

注:(1) $F(p) = (p^9 - 1)/(p-1)$是可约的,但 $h_2(k) \neq 0$;(2) $F(p) = p^4 + 4$是不可约的,但 $h_2(k) = 0$.在这两种情况下 $F(p)$无素数解.如 $F(p)$有无限多个素数解它必须同时满足(I)和(II)两个条件.我们用 $O(\frac{\log\log N}{\log N})$表示误差项.它不影响本文结果.在文献[4]中我们用 $c(p_i)/c(N)$表示误差项,并提出无限上升法.维诺格拉道夫在 1937年并没有证明三素数问题[9].

参考文献

1 蒋春暄.余新河数学题和它的应用.潜科学,1993,3: 10~15.

2 Jiang Chunxuan. On the analytic and minimum solutions for Goldbach-Schmirelman problem. To send to Arch. Math.

3 Jiang Chunxuan. On the minimum solutions for Goldbach conjecture. To send to Arch. Math.

4 Jiang Chunxuan. On the infinite ascent method. To send to Math. Ann.(本文已在美国耶鲁大学公布)

5 Jiang Chunxuan. On the additive prime number theorem. To send to Inv. Math.

6 余新河.哥德巴赫猜想的新尝试.福建师范大学学报,1993,9(2): 1~8.

7 余新河.余新河数学题(百万港元征解).福建日报,1993.3.3;光明日报,1993.3.11;人民日报,1993.4.6.

8 王志雄.余新河数学题与哥德巴赫猜想.北京:科技文献出版社,1995.

9 Jiang Chunxuan. A unified asymptotic formuia for the additive prime theory. preprint, 1995, November.

(责任编辑 蒋汉明)