DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (1): 16~ 21

二维三参数模型的失稳周期控制及目标瞄准*

Controlling an Unstable Period of the Two-dimentional Map with Three Parameters or Directing It to Targets

肖长明 陈光旨 刘宗华 覃团发
Xiao Changming Chen Guangzhi Liu Zonghua Qin Tuanfa

(广西大学物理系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Phys., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

倪皖荪
Ni Wansun
(南京大学电子系 江苏南京市汉口路 22号 210008)
(Electronic Dept., Nanjing Univ., 22 Hankou Road, Nanjing, Jiangsu, 210008)

摘要 用调参数法改变相体积的变化率和 Lyapunov指数,从而在混沌区、分岔区控制二维三参数模型的失稳周期、引导失稳周期轨道到目标点. 该方法有较强的抗干扰性.

关键词 混沌 失稳周期 目标瞄准

Abstract The method of small perturbation to available system parameters was used to modify the rate of phase volume and Lyapunov exponents, So the unstable period embodied in chaos and bifurcations of the tow-dimentional map with three parameters was controled and directed to a given target. This method has a good ability of noiseproof.

Key words chaos, Unstable period, target object

1990年 E. Ott, C. Grebogi与 J. A. York (O. G. y)[1,2]利用混沌的遍历性,等待点进入一定范围后,通过对参数的微小改变,实现了混沌区中失稳周期轨道的控制与瞄准,引起了广泛的关注. 很多人在此基础上作了大量的工作,倪皖荪等利用改变 Lyapunov指数把控制和瞄准的区域扩大到分岔区[7],陈式刚等人给出了控制范围[8]; 这些都可认为是 O. G. Y. 方法的发展和完善. 常用的方法还有负反馈法[9,10]和级数展开法[11].

经常用来讨论混沌现象及混沌控制的模型,有一维的 Logisti映象和二维的 Henon映象. 本文用调参数法实现二维三参数模型[4,5]的失稳周期控制及目标瞄准. 选二维三参数模型是因为它有许多 Logisti映象和 Henon映象所没有的性质和特点,其方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n^2 + ax_n - y_n \\ y_{n+1} = bx_n + cy_n \end{cases} \tag{1}$$

其雅可毕行列式为

$$B = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} a + 2ax_n & -1 \\ b & c \end{vmatrix} = c(a + 2ax_n) + b$$

当 $c=0$时,它变为 Henon映象;当 $b=1, c=0$时,则为标准映象[9]. 它既有正常的倍周期分岔,还有相体积变化率大于 1的奇异分岔[4,5]. 以前的控制都是对耗散系统进行的,即相体积变化率小于 1, 对于二维三参数模型,存在相体积变化率大于 1的情形,通过调参数可改变相体积变化率,使之小于 1; 另外它还有多个可调参数,通过对它的讨论可以把调参数法推广到调多个参数.

1 调参数法的原理及公式

利用混沌的遍历性,等待它进入到周期点附近,

1994-12-25收稿.
* 广西大学青年科学基金资助项目.

然后对参数使一微小的改变，即可控制到周期点. 引入参变量，其雅可毕行列式随之变化，即相体积变化率发生变化，为了能稳定地控制，除要求其本征方程的本征值的绝对值小于 1外，还要求相体积的变化率小于 1. 以一周期为例，分别导出调一参数和调多参数的控制公式.

1.1 调参数 c

设周期点为 (x^*, y^*)，一般地取

$$c_n = c + \varepsilon_1(x_n - x^*) + \varepsilon_2(y_n - y^*), \qquad (2)$$

代入(1)式，在周期点展开，并只保留到线性项，有

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} - x^* \\ y_{n+1} - y^* \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_n - x^* \\ y_n - y^* \end{pmatrix}.$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} a + 2ax^* & -1 \\ b + \varepsilon_1 y^* & c + \varepsilon_2 y^* \end{pmatrix},$$

由 B 的本征方程 $|B - \lambda| = 0$ 由此得到 $\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的关系式

$$\lambda^2 - (a + 2ax^* + c + \varepsilon_2 y^*)\lambda + b + \varepsilon_1 y^* = 0,$$

在控制范围内(见下一段)取定 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的值，为了方便，可以令其副对角线上元素之一为零，因而有

$$\varepsilon_1 = -b/y^* \quad \varepsilon_2 = (\lambda - C)/y^*, \qquad (a)$$

$\lambda = 0$ 时为最优控制，当失稳轨道离待控周期足够近时，只需一次调控即可到达要控制的周期轨道.

1.2 调参数 a c

引入参变量 a_n 的关系式

$$a_n = a + \varepsilon_{11}(x_n - x^*) + \varepsilon_{12}(y_n - y^*), \qquad (3)$$

同样地讨论，可求出 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \lambda$ 的关系

$$\begin{vmatrix} a + 2ax^* + \varepsilon_{11}(x_n - x^*) - \lambda & -1 + \varepsilon_{12}(x_n - x^*) \\ b + \varepsilon_1 y^* & c + \varepsilon_2 y^* - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 - (a + 2ax^* + c + \varepsilon_{11}(x^* + x^{*2}) + c + \varepsilon_2 y^*)\lambda - (b + \varepsilon_1 y^*)(\varepsilon_{12}(x^{*2} + x^*) - 1) = 0,$$

这是一个很复杂的关系式，它包含了 5个变量，取值范围不好确定，为了计算的简便，可令副对角线、主对角线上的元素均为 0，得

$$\varepsilon_{12} = 1/(x^* + xy^{*2}), \qquad \varepsilon_1 = 1b/x^*,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{(\lambda - a - ax^*)}{(x^* + x^{*2})}, \qquad \varepsilon_2 = (\lambda - c)/(y^*). \quad (b)$$

其中 $|\lambda| < 1$，$\lambda = 0$ 时为最优控制. 这样取的 ε 满足两个条件，即相体积不膨胀和 *Lyapunov* 指数小于 1.

2 控制范围及控制结果

控制范围是指系数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ 等的取值范围[3]，在此范围内取值，可实现控制. 控制范围由两个条件决定，即相体积不膨胀和 *Lyapunov* 指数小于 1. 为了明显，改记 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ 为 z_1, z_2, z_{11}, z_{12}.

2.1 调参数 c

由上面第一个条件推得:

$$\begin{aligned} &-1 - b - (a + 2ax^*)(c + z_2 y^*) \\ &< z_1 y^* \\ &< 1 - b - (a + 2ax^*)(c + z_2 y^*), \end{aligned}$$

对于第二个条件，可先写出 $z_1 y^* = f(\lambda)$，并对 λ 求偏导，定出关于 λ 的增减区域，由此求得 $z_1 y^*$ 的取值范围，下面来求 $z_1 y^*$ 的范围.

$$\begin{aligned} z_1 y^* = &-(a + 2ax^*)(c + zy^*) \\ &- \lambda^2 - (a + 2ax^* + c + z_2 y^*)\lambda - b, \end{aligned}$$

当 $a + 2ax^* + c + z_2 y^* > 2\lambda_m$ 时，

即 $z_2 y^* > 2\lambda_m - (a + 2ax^* + c + z_2 y^*)$，

其中 $\lambda_m = (a + 2ax^* + c + z_2 y^2)/2$，

一般地取 $\lambda_m = 1$，则

$$\begin{aligned} z_1 y^* > &-(a + 2ax^*)(c + z_2 y^*) \\ &- 1 + (a + 2ax^* + c + z_2 y^*) - b \\ z_1 y^* > &-(a + 2ax^*)(c + z_2 y^*) \\ &- 1 - (a + 2ax^* + c + z_2 y^*) - b, \end{aligned}$$

控制范围即是这些不等式的公共区域. 取 $a = 2.5$，$b = c = -0.5$，$x^* = -11/15$，$y^* = 11/45$，代入上面四个不等式得到 z_1, z_2 的取值范围，控制范围可用图 1中四条线围成的区域表示，图 1即为它的控制范

图 1 调 c 时的控制范围
Fig. 1 Control range with c adjusting

围.在 (a) 式中,令 $\lambda = 0$,则 $X_1 = X_2 = 2.05$,点 (2.05, 2.05) 在图 1内,因此 (a) 式是适用的.注意,图 1中应去掉 (0, 0) 点及其邻域.

2.2 调参数 a c

同样的讨论可以给出 z_{1}、z_{2}、z_{11}、z_{13}、λ 的关系式

$$\begin{vmatrix} a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})-\lambda & -1+Z_{12}(x^{*}+x^{*2}) \\ b+z_{1}y^{*} & c+z_{2}y^{*}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

为了便于讨论,先令 $z_{12} = z_{2} = 0$,定出 z_{11}、z_{1} 的取值范围,这时上式变为

$$\begin{vmatrix} a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})-\lambda & -1 \\ b+z_{1}y^{*} & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

z_{11}、z_{1} 的取值范围由下列不等式确定:

$$-1-c(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})) < z_{1}y^{*} < 1-c(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})),$$

当 $a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c+2<0$ 时,

$$-2(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c)-1 < z_{11}y^{*} < 2(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c)-1,$$

当 $a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c+2>0$ 时,

$$-2(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c)-1 > z_{11}y^{*} < 2(a+2ax^{*}+z_{11}(x^{*}+x^{*2})+c)-1,$$

a, b, c, x^{*}, y^{*} 取上面同样的数值,z_{11}、z_{1} 的取值范围由图 2表示,图 2即为 z_{11}、z_{2} 的控制范围图.同样的讨论可以定出 z_{11}、z_{2}; z_{13}、z_{1}; z_{13}、z_{2} 的取值范围.

图 2 调 a、c 时的控制范围

Fig. 2 Control range with a, c adjusting

从图 1、2可知,z_{11}、z_{1} 的取值范围大于 z_{13}、z_{2} 的范围,由此可以得出:调多参数会增加 z 的取值范围;另外由 (a)、(b) 式取得的值是在取值范围内.

在图 1确定的范围内,取 $a = 2.5, b = c = -0.5, X_1 = 3, X_2 = 0$; $a = 2.35, b = c = -0.5, X_1 = 2.5, X_2 = 0$ 分别在混沌区、分岔区控制一周期,见图 3、4、5、6,其中图 3、5分别为从混沌区、分岔区控制到一周期的 X 控制图,图 4、6分别为从混沌区、分岔区控制到一周期的 Y 控制图.在图 2确定的范围内,取 $a = 2.5, b = c = -0.5, X_1 = 3, X_{11} = 2$; $a = 2.35, b = c = -0.5, X_1 = 3, X_{11} = 1.5$ 分别在混沌区、分岔区控制一周期,其控制图与调 c 时完全相同,为了避免重复,其图不再给出,参照图 3、4、5、6即可.

图 3 在混沌区调 c,调 a、c 的控制图

Fig. 3 Control map with c adjusting and a, c adjusting at chaos area

图 4 在混沌区调 c,调 a、c 的控制图

Fig. 4 Control map with c adjusting and a, c adjusting at chaos area

图 5 在分岔区调 a, c,调 c 的控制图

Fig. 5 Control map with a, c adjusting and c adjusting at bifurcation area

3 外加噪声时的控制

从上面的讨论可知,调多参数比调一参数的控制范围大,下面讨论调多参数对噪声的抵抗能力,这

图 6 在分岔区调 a,c,调 c 的控制图

Fig. 6 Control map with a,c adjusting and c adjusting at bifurcation area

里的讨论也是与调一参数相比较而言的.

加噪声后,(1)式变为

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n^2 + ax_n - y_n + n(r) \\ y_{n+1} = bx_n + cy_n + n(r) \end{cases}, \qquad (1')$$

其中 $n(r)$ 为所加的噪声,可用 $(-1, 1)$ 之间的随机数缩小若干倍得到,缩小的倍数根据需要调节.用下面几个量来描述所加噪声及系统的抗干扰性:噪声的平均值,用 $\langle n(r)\rangle$ 表示,符号"$\langle\ \rangle$"表示求平均,噪声的均方根为 $\sqrt{\langle n(r)^2\rangle}$,系统对周期点的偏差是 $\sqrt{\langle (x_m - x^*)^2\rangle}$、$\sqrt{\langle (y_m - y^*)^2\rangle}$,为了方便,分别记 $\sqrt{\langle n(r)^2\rangle}$、$\sqrt{\langle (x_m - x^*)^2\rangle}$、$\sqrt{\langle (y_m - y^*)^2\rangle}$ 为 $\langle N\rangle$、$\langle xn\rangle$、$\langle yn\rangle$.

一般地取 $\langle n(r)\rangle = 0$,分别对上面的控制图对应的参数加上噪声,得到图 7、8、9、10.从图形上很难看出它们与图 3、4、5、6有明显的差别,但其差别可从数据上发现.不加噪声时,$\langle xn\rangle = \langle yn\rangle = 0$,加噪声后,$\langle xn\rangle \neq \langle yn\rangle \neq 0$;而且,在不同区域、调不同的参数,它们也有差别.在混沌区,当调 c 时,能加的最大噪声 $\langle N\rangle = 1.99\times 10^{-2}$,$\langle xn\rangle = 0.24358796$,

图 7 在混沌区加噪声后,调 c,调 a,c 的控制图

Fig. 7 Control map with c adjusting and a,c adjusting at chaos area after noise-added

图 8 在混沌区加噪声后,调 c,调 a,c 的控制图

Fig. 8 Control map with c adjusting and a,c adjusting at chaos area after noise-added

图 9 在分岔区加噪声后,调 a,c 的控制图

Fig. 9 Control map with c adjusting and a,c adjusting at bifurcation area after noise-added

图 10 在分岔区加噪声后,调 a,c 的控制图

Fig. 10 Control map with c adjusting and a,c adjusting at bifurcation area after noise-added

$\langle yn\rangle = 4.98\times 10^{-2}$;而调 a、c 时,能加的最大噪声 $\langle N\rangle = 0.10066$,$\langle xn\rangle = 6.45\times 10^{-2}$,$\langle yn\rangle = 2.5\times 10^{-2}$.在分岔区,当调 a 时,能加的最大噪声 $\langle N\rangle = 1.99\times 10^{-2}$,$\langle xn\rangle = 0.24358796$,$\langle yn\rangle = 4.98\times 10^{-2}$;而调 a、c 时,能加的最大噪声 $\langle N\rangle = 2.5\times 10^{-2}$,$\langle xn\rangle = 3.4988\times 10^{-2}$,$\langle yn\rangle = 2.25488\times 10^{-2}$.

由此得到以下的结论,该方法有较强的抗干扰性;调多参数时抗干扰性比调一个强;在混沌区的抗干扰性比分岔区强.

4 目标瞄准

目标瞄准,也要利用混沌的遍历性,待其进入与目标的偏差在参数的可调范围时,通过改变参数把失稳轨道引到另一失稳轨道;分岔区的瞄准实质是从稳定轨道引向失稳轨道或轨道之外的点.在瞄准时,每次迭代都从初值出发,即保持初值不变,在参数可能变化范围内,用尽可能少的迭代次数到达目标,其实际是求 $f(x_o^{(m)}, p^*) = x_t$,其中 $x_o^{(m)}$ 是进入瞄准范围时的第 m 次自由迭代的初值,x_t 是目标点.因此目标瞄准,要求参数有一定的改变,参数可调范围越大,等待次数越少,越容易实现瞄准.

对于二维三参数模型,进行瞄准时(1)式应变形为

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_o^{(m)2} + a_n x_o^{(m)} - y_o^{(m)} \\ y_{n+1} = b x_o^{(m)} + c_n y_o^{(m)} \end{cases}, \qquad (1^*)$$

相应的参数按下式改变

$$a_{n+1} = a_n + X_{11}(x_{n+1} - x_t) + X_{12}(y_{n+1} - y_t),$$

$$c_{n+1} = c_n + X_1(x_{n+1} - x_t) + X_2(y_{n+1} - y_t).$$

调参数的方式与控制时不同,当控制到周期时参数回到原值,当瞄准到目标时参数却有一定的改变.在 $(x_o^{(m)}, y_o^{(m)})$ 点附近展开,保留到一级小量,有

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} - x_t \\ y_{n+1} - y_t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_n - x_t \\ y_n - y_t \end{pmatrix},$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} X_{11}(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2}) + 1 & X_{12}(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2}) \\ X_1 y_o^{(m)} & X_2 y_o^{(m)} + 1 \end{pmatrix},$$

逐步趋向目标,即迭代收敛的条件是

$$|B - \lambda| = 0$$

$$|\lambda| < 1.$$

在上面两式中,若令 $X_{11} = X_{12} = 0$ 或 $X_1 = X_2 = 0$,即只调参数 a 或 c,本征方程变为

$$(\lambda - 1)(\lambda - X_2 y_o^{(m)} + 1) = 0,$$

或

$$(\lambda - 1)(\lambda - X_{11}(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2}) + 1) = 0.$$

上面的方程只能确保其中一个本征值小于 1,另一本征值为 1,就是说若只调一个参数值不能引导失稳轨道到目标点,因此在二维三参数模型中目标瞄准时,非调多参数不可.

为了简单,令 $X_1 = X_{12} = 0$,

则 $X_{11} = (\lambda - 1)/(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2})$,

$X_2 = (\lambda - 1)/y_o^{(m)}$,

在目标瞄准时,根据参数可调范围给出瞄准范围,即只要 $x_o^{(m+1)}$ 离目标 x_t 在此范围内,即可调参数把它引导到目标.设参数 a、c 的可调范围为 $W_{a\max}$、$W_{c\max}$,则

$$W_{a\max} > |X_{11}(x_{n+1} - x_t) + X_{12}(y_{n+1} - y_t))|,$$

$$W_{c\max} > |X_1(x_{n+1} - x_t) + X_2(y_{n+1} - y_t))|.$$

为了简单,令 $X_1 = X_{12} = 0$,则上面两式变为

$$W_{a\max} > |X_{11}(x_{n+1} - x_t|,$$

$$W_{c\max} > |X_2(y_{n+1} - y_t|.$$

令 $\lambda = 0$,用最优控制调参数,有

$$X_{11} = -1/(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2}),$$

$$X_2 = -1/y_0^{(m)},$$

只需

$$\sqrt{(x_o^{(m+1)} - x_t)^2 + (y_o^{(m+1)} - y_t)^2} < \sqrt{W_{a\max}(x_o^{(m)} - x_o^{(m)2})^2 + W_{c\max} y_o^{(m)2}},$$

即可进行调控,上式确定的范围即为瞄准范围.下面在混沌区、分岔区进行目标瞄准.

在混沌区,取 $a = 2.5$, $b = c = -0.5$, $\lambda = 0$, $X_{11} = 1/(x_o^{(m)} + x_o^{(m)2})$, $X_2 = 1/y_0^{(m)}$,取 $x_o = -0.2$, $y_o = -0.2$, $x_t = -0.75$, $y_t = -0.21$,经过 4次等待, $x_0^{(5)} = -0.72499$, $y_0^{(5)} = 0.24999$, 5次调控后, a 变为 2.5998, c 变为 -0.69955, x 变为 -0.74979, y 变为 0.180022,绘得图 11, 12,其中图 11、12分别为 X、Y 的瞄准图.另在分岔区, $a = 2.35$, $b = c = -0.5$,其它数据与混沌区同,经过 4 次等待, $x_0^{(5)} = -0.749788$, $y_0^{(5)} = 0.2204$, 5 次调控后, a 变为 2.68546, c 变为 -0.459, x 变为 -0.749788, y 变为 0.180022,绘得图 13, 14,其中图 13、14分别为 X、Y 的瞄准图.

图 11 在混沌区的目标瞄准图

Fig. 11 Targets at chaos area

图 12 在混沌区的目标瞄准图

Fig. 12 Targets at chaos area

图 13 在分岔区的目标瞄准图

Fig. 13 Targets at bifurcation area

图 14 在分岔区的目标瞄准图

Fig. 14 Targets at bifurcation area

从上面二例知道,调多参数能较好地引导失稳轨道到达目标.

6 结束语

本文以二维三参数模型的一周期为例,把调参数法从调一参数推广到调多参数,以此改变相体积变化率和 Lyapunov 指数,在分岔区、混沌区实现对失稳周期控制和引导失稳轨道到达目标.从上面的讨论知道,多参数远比一参数复杂,但是调多参数的优点也是很明显的,它既可扩大控制范围,增强系统抗干扰性,还能在目标瞄准时调一参数失效的情形下,实现失稳轨道目标.因此,从调一参数推广到调多参数是一项很有意义的工作,本文的讨论是初步的,还有许多开创性的工作去做.

参考文献

1 Ott E, Grebogi C, York J A. Phys Rev Lett, 1990, 64 (11): 1196.

2 Shinbrot T, Ott E, Grebogi C, Yorke J A, phys Rev Lett, 1990, 65 (26): 3215.

3 Tan Yi, He Xingtu, Chen Shingang, Chine Phys Lett, 1993, 10 (6): 321.

4 Ni Wansun. Chinese Phys Lett, 1986, 3 (12): 573.

5 倪皖荪,童培庆,郝柏林 .物理学报, 1985, 34 (4): 503.

6 Hao Bailin. Progress in Physics, 1983, 3 (3): 329.

7 Ni Wansun. Chinese Phys Lett, 1994, 11 (6): 325.

8 Helleman. R M G. Fandamental Problems in Statistic, 1980, 5: 165.

9 Hu Guang, He Kaifen. Phys Rev Lett, 1994, 71 (23): 3794.

10 Hu Guang, Qu Zhilin, Phys Rev Lett, 1994, 72 (1): 68.

11 Kapita Niak T. Chaos, Solitons Practal, 1992, 2 (5): 519.

(责任编辑 蒋汉明 邓大玉)

(上接第 5页 Continue from page 5)

14 Lin Yixun, Yuan Jinjing, Minimum profile of grid networks in structure analysis, Systems Science and Mathematical Sciences. (to appear).

15 Syslo, M M, Zak J, The bandwidth problem for orderd caterpillars, Computer Science Department Report CS-80-065, Washington State University, 1980.

16 姚 兵,王建方,刘儒英 .双星的带宽 .青海师范大学学报, 1990, (1): 13~ 16.

17 王树乔 .图论及其算法 .合肥: 中国科学技术大学出版社, 1990. 266.

18 Lin, Yixun, A level structure approach on the bandwidth problem for special graphs, Graph Theory and Its Applications: East and West, ANN N Y ACAD SCI, 1989, 576: 344~ 357.

(责任编辑 蒋汉明)