DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.02.001
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (2): 1~ 4

一类一阶中立型时滞微分方程的振动性
Oscillation of Solutions on a Neutral Delay Differential Equations

杨喜陶　　林　亮
Yang Xitao　　Lin Liang

(桂林工学院　桂林市建干路 12号　541004)
(Guilin Institute of Technology, 12 Jiangan Road, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要　讨论了一类中立型微分方程解的振动性, 得到了此类方程存在非振动解或一切解振动的充分条件.
关键词　振动解　中立型　正解　时滞微分方程
Abstract　The oscillation of solutions on a neutral delay differential equations was discussed, and the sufficient conditions for the existence of nonoscillatory solutions and for the oscillation of all solution to these equations were defined.
Key words　oscillatory solution, neutral, positive solution, delay differential equation

考虑一阶中立型微分方程:

$$\left(x(t)-\sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t-r_i(t))\right)'+Q(t)x(g(t))=0\qquad t\geqslant t_0,\tag{1}$$

其中 $Q(t)$、$g(t)$、$C_i(t)$、$r_i(t)\in C[t_0,+\infty)$, $Q(t)>0, C_i(t)\geqslant 0, r_i(t)>0, g(t)$ 单调递增, $g(t)<t$.

关于方程 (1) 的振动性研究, 文献 [1]给出了当 $k=1, r(t)\equiv r, g(t)=t-$ e时 (1) 的一切解振动的充分条件, 文献 [2]给出了当 $g(t)=t-$ e, $0<r_0\leqslant r_i(t)\leqslant r_1$ ($1\leqslant i\leqslant k$) 时方程 (1) 存在非振动解与一切解振动的充分条件. 本文将在更一般的条件下, 给出方程 (1) 存在非振动解与一切解振动的充分条件, 作为其推论推广了文献 [1]和文献 [2]的相应定理.

本文假设方程 (1) 的解在 $[t_0,+\infty)$ 上存在, 方程 (1) 的解称为振动, 如果它有任意大的零点; 称为非振动, 如果它最终为正或最终为负.

定义　$e_i(t)=g^{-1}(g(t)-r_i(g(t)))$　$1\leqslant i\leqslant k$, $t^*=\sup\{t|\, g(t)\leqslant t_0, e_i(t)\leqslant t_0, 1\leqslant i\leqslant k\}$, 则 $e_i(t)<t$.

1　几个引理

引理 1　假设方程 (1) 满足:

$$\text{(i)}\ \lim_{t\to+\infty}(t-r_i(t))=\lim_{t\to+\infty}g(t)=+\infty,\tag{2}$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{i=1}^{k} C_i(t)\leqslant 1,\quad \forall\, t\geqslant t_0,\tag{3}$$

$x(t)$ 为方程 (1) 的最终正解, $y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t-r_i(t))$, 则对充分大的 t, 有 $y(t)>0$.

证明见文献 [2].

引理 2　假设条件 (2)与 (3)满足, 则方程 (1)存在非振动解的充要条件是: 对任意正连续函数 $H(t)$, 存在 $T>t^*$ 及正连续函数 $\lambda(t)$ 满足

$$\lambda(t)H(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i(g(t))Q(t)}{Q(e_i(t))}\lambda(e_i(t))H(e_i(t))\times\exp\int_{e_i(t)}^{t}\lambda(s)H(s)\mathrm{d}s+Q(t)\exp\int_{g(t)}^{t}\lambda(s)H(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant T\tag{4}$$

证明　必要性　设方程 (1) 有非振动解 $x(t)$, 不妨设 $x(t)>0, t\geqslant t_1$, 由引理 1, 存在 $t_2\geqslant t_1$, 使

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t-r_i(t))>0,\quad t\geqslant t_2\tag{5}$$

由条件 (2) 存在 $T>t_2$, 使对于 $1\leqslant i\leqslant k$;

$$g(t)>t_2,\quad e_i(t)>t_2,\quad \forall\, t\geqslant T\tag{6}$$

令: $\dfrac{y'(t)}{y(t)}=-\lambda(t)H(t)$. 则 $\forall\, t\geqslant t_2, \lambda(t)\geqslant 0$, 且

$$y(t)=y(t_2)\exp\int_{t_2}^{t}-\lambda(s)H(s)\mathrm{d}s,$$

1995-10-09收稿, 1996-04-01修回。

把方程(1)化为

$$y'(t) = -Q(t)y(g(t)) - \sum_{i=1}^{k} C_i(g(t)) \times \frac{y'(e_i(t))}{Q(e_i(t))} Q(t),$$

两边除以 $y(t)$ 得

$$\lambda(t)H(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i(t)(g(t)) \frac{Q(t)\lambda(e_i(t))H(e_i(t))}{Q(e_i(t))} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\mathrm{d}s + Q(t)\exp\int_{g(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\mathrm{d}s,$$

$t \geqslant T$

充分性　对于 $H(t) = 1$,设有正连续函数 $\lambda(t)$ 及 $T > t^*$,满足方程(4),令

$$T^* = \inf_{\geqslant T}\{g(t), e_i(t), 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

$$y(t) = \exp\int_{T^*}^{t} -\lambda(s)\mathrm{d}s, x(t) = -\frac{y'(g^{-1}(t))}{Q(g^{-1}(t))},$$

则有

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\lambda(t), \quad t \geqslant T^* \tag{7}$$

$$x(t) > 0, \quad t > g(T^*) \tag{8}$$

由 $\lambda(t)$ 满足方程(4)可得

$$-\frac{y'(t)}{y(t)} = Q(t)\frac{y(g(t))}{y(t)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))y'(e_i(t))}{Q(e_i(t))y(t)} Q(t), \quad t \geqslant T$$

从而有

$$-y'(t) = Q(t)y(g(t)) - \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))y'(e_i(t))}{Q(e_i(t))} Q(t). \tag{9}$$

由(9)及 $e_i(t)$ 与 $x(t)$ 的定义得

$$-\frac{y'(g^{-1}(t))}{Q(g^{-1}(t))} = y(t) - \sum_{i=1}^{k} C_i(t) \times \frac{y'(g^{-1}(t - r_i(t)))}{Q(g^{-1}(t - r_i(t)))} = y(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t - r_i(t)),$$

$$t \geqslant T \tag{10}$$

从而有

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t - r_i(t)), \quad t \geqslant T \tag{11}$$

由方程(9)、(10)及(11)有

$$\left(x(t) - \sum_{i=1}^{k} C_i(t)x(t - r_i(t))\right)' + Q(t)x(g(t)) = 0, \quad t \geqslant T$$

由方程(8)及上式知方程(1)具有最终正解 $x(t)$.

2 本文主要结果

定理 1 设方程(1)满足条件(2)与(3),且存在正连续函数 $H(t)$ 及 $T > t^*$,$_0 > 0$满足

$$\sup_{\geqslant T}\Big\{\frac{Q(t)}{\_0 H(t)}\exp\int_{g(t)}^{t} \_0 H(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} \frac{Q(t)C_i(g(t))H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)}\exp\int_{e_i(t)}^{t} \_0 H(s)\mathrm{d}s\Big\} \leqslant 1, \tag{12}$$

则方程(1)存在非振动解.

证明　设 $T^* = \inf_{\geqslant T}\{g(t), e_i(t), 1 \leqslant i \leqslant K\}$,令

$$v_0(t) = \begin{cases} \_0 H(T) & T^* \leqslant t < T \\ \_0 H(t) & T \leqslant t \end{cases}$$

当 $t \geqslant T$ 时,令

$$v_{n+1}(t) = Q(t)\exp\int_{g(t)}^{t} v_n(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} \frac{Q(t)C_i(g(t))}{Q(e_i(t))} v_n(e_i(t))\exp\int_{e_i(t)}^{t} v_n(s)\mathrm{d}s$$

当 $T^* \leqslant t < T$ 时,令

$$v_{n+1}(t) = v_{n+1}(T),$$

由条件(11)得: $\forall t \geqslant T^*$,有

$$\cdots \leqslant v_{n+1}(t) \leqslant v_n(t) \leqslant \cdots \leqslant v_1(t) \leqslant v_0(t),$$

由于 $v_n(+\ )$ 为正,则对 $\forall t \geqslant T^*$,$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t)$,又由 Lebesgue 定理,$\forall t > T^*$,$v(t)$ 在 $[T^*, t]$ 上 Lebesgue可积,且满足

$$v(t) = Q(t)\exp\int_{g(t)}^{t} v(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} \frac{Q(t)C_i g(t))}{Q(e_i(t))} \times v(e_i(t))\exp\int_{e_i(t)}^{t} v(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant T \tag{13}$$

由于当 $T^* \leqslant t < T$ 时,$v(t) \equiv C$,知 $v(t)$ 在 $[T^*, T)$ 上连续,又由 $\int_{g(t)}^{t} v(s)\mathrm{d}s$ 及 $\int_{e_i(t)}^{t} v(s)\mathrm{d}s$ 在 $[T, +\infty)$ 上连续,令: $T_1 = \sup\{t_1 | \forall t \in [T, t_1)$ 有 $g(t) - r_i(g(t)) < g(T), 1 \leqslant i \leqslant k\}$,由 $r_i(t)$、$g(t)$ 的连续性及 $r_i(t) > 0$,知: $T_1 \geqslant T$,从而 $v(e_i(t))$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 在 $[T, T_1)$ 上连续,由(13)知 $v(t)$ 在 $[T^*, T_1)$ 上连续,令

$$T_2 = \sup\{t_1 | \lambda(t) \text{在} [T^*, t_1) \text{上连续}\}$$

反设 $T_2 < +\infty$,因为 $v(t)$ 在 $[T^*, T_2)$ 上连续,令:

$T_3 = \sup\{t_2 | \forall t \in [T_2, t_2)$ 有 $g(t) - r_i(g(t)) < g(T_2), 1 \leqslant i \leqslant k\}$,同理有 $T_3 > T_2$,又由(13)知

$v(t)$ 在 $[T_2, T_3)$ 上连续,产生矛盾,从而有: $T_2 = +\infty$,即对于 $H(t) \equiv 1$存在正连续函数 $v(t) \in C[T^*, +\infty)$满足方程(4),由引理2方程(1)存在非振动解.

推论 1 设 $g(t) = t - e(e > 0)$, $0 < r_0 \leqslant r_i(t) \leqslant r_1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 条件(3)满足, 且存在 $0 \leqslant X < 1$, $T \geqslant t_0 + f$, $(f = \max(V, e))$,满足:

$$(\mathrm{i}) \int_{t-f}^{t} Q(s)\,ds \leqslant \frac{1-X}{e}, t \geqslant T - f. \tag{14}$$

$$(\mathrm{ii}) e^{-X}\Big[e\sum_{i=1}^{k} C_i(t-e) + 1\Big] \leqslant 1, \ \forall t \geqslant T \tag{15}$$

则方程(1)具有非振动解.

证明 在定理1中令: $H(t) = Q(t)$, $\_{}_0 = e$,因为 $\int_{t-e}^{t} eQ(s)\,ds < \int_{t-f}^{t} eQ(s)\,ds \leqslant 1 - X$,

$$\int_{t-r_i(t-e)}^{t} eQ(s)\,ds < \int_{t-r_i}^{t} eQ(s)\,ds < \int_{t-f}^{t} eQ(s)\,ds \leqslant 1 - X,$$

故有

$$\frac{Q(t)}{\_{}_0 H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} \_{}_0 H(s)\,ds + \sum_{i=1}^{k} \frac{Q(t)C_i(g(t))H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} \_{}_0 H(s)\,ds = \frac{1}{e}\exp\int_{t-e}^{t} eQ(s)\,ds + \sum_{i=1}^{k} C_i(t-e)\exp\int_{t-r_i(t-e)}^{t} eQ(s)\,ds \leqslant e^{-1}e^{1-X} + \sum_{i=1}^{k} C_i(t-e)e^{1-X} = e^{-X}\Big(e\sum_{i=1}^{k} C_i(t-e) + 1\Big) \leqslant 1$$

从而定理1的条件满足,方程(1)具有非振动解.

推论 2 设 $g(t) = t - e(e > 0)$, $0 < r_0 \leqslant V_i(t) \leqslant V_1$, $(1 \leqslant i \leqslant k)$,条件(3)满足,且存在 $\_ > 0$, $T > t_0 + f$使

$$\sup_{t \geqslant T}\Big\{\frac{1}{\_} Q(t) \exp(\_{}_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(t-e)Q(t)}{Q(t - r_i(t-e))} \exp(\_ V_i(t-e))\Big\} \leqslant 1,$$

则方程(1)具有非振动解.

证明 在定理1中令 $H(t) = 0$即可.

定理 2 设方程(1)满足(2)与(3),同时还满足:

$$(\mathrm{i}) \lim_{t \to +\infty} \int_{g(t)}^{t} Q(s)\,ds > 0; \tag{16}$$

(ii)存在正连续函数 $H(t)$使

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{g(t)}^{t} H(s)\,ds > 0; \tag{17}$$

(iii) 存在 $T > t^*$ 使

$$\inf_{\substack{t \geqslant T \\ \_ > 0}}\Big\{\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))Q(t)H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \exp\int_{e_i(t)}^{t} \_ H(s)\,ds + \frac{Q(t)}{\_ H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} \_ H(s)\,ds\Big\} > 1, \tag{18}$$

则方程(1)的一切解振动.

证明 设方程(1)存在非振动解,由引理1存在 $T_1 > T$及正连续函数 $\lambda(t)$使

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))Q(t)\lambda(e_i(t))H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\,ds + \frac{Q(t)}{H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\,ds, \quad t \geqslant T_1. \tag{19}$$

从而有

$$\lambda(t)H(t) = Q(t)\exp\int_{g(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\,ds. \tag{20}$$

由式(16)可知

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{g(t)}^{t} \lambda(s)H(s)\,ds < +\infty. \tag{21}$$

由式(17)得

$$0 < \lambda_0 \triangleq \lim_{t \to +\infty} \lambda(t) < +\infty. \tag{22}$$

由式(18)存在 $T \in (0,1)$使

$$T\inf_{\substack{t \geqslant T \\ \_ > 0}}\Big\{\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))Q(t)\lambda(e_i(t))H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} \_ H(s)\,ds + \frac{Q(t)}{\_ H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} \_ H(s)\,ds\Big\} > 1. \tag{23}$$

对上述 T,存在 $t_3 > T_1$使

$$\lambda(t) > T\lambda_0, \quad t \geqslant t_3 \tag{24}$$

把式(24)代入式(19)得

$$\inf_{t \geqslant t_3}\Big\{\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))Q(t)T\lambda_0 H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} T\lambda_0 H(s)\,ds + \frac{Q(t)}{H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} T\lambda_0 H(s)\,ds\Big\} \leqslant \lambda_0.$$

从而有

$$T\inf_{t \geqslant t_3}\Big\{\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i(g(t))Q(t)H(e_i(t))}{Q(e_i(t))H(t)} \times \exp\int_{e_i(t)}^{t} T\lambda_0 H(s)\,ds + T\lambda_0 \frac{Q(t)}{H(t)} \exp\int_{g(t)}^{t} T\lambda_0 H(s)\,ds\Big\} \leqslant 1$$

与式(23)矛盾,从而方程(1)的一切解振动.

定理 3 设方程(1)满足(2)、(3)、(17)、(18),此外还设存在 M,对(17),(18)中的 $H(t)$ 有

$$\int_{g(t)}^{t} H(s)\,ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{e_i(t)}^{t} H(s)\,ds \leqslant M, \quad t \geqslant T, \tag{25}$$

则方程(1)的一切解振动.

证明　令 $\kappa(t)=\dfrac{Q(t)}{H(t)}$,则存在 $T>0$,使

$$\kappa(t)>a,\quad t\geqslant T \tag{26}$$

反设有 $t_n>T$,使 $\kappa(t_n)=\inf\limits_{t\leqslant t_n}\kappa(t)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\kappa(t_n)=0$,由 $\kappa(t)$ 为正连续函数,知 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$,

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i(g(t_n))Q(t_n)H(e_i(t_n))}{Q(e_i(t_n))H(t_n)}\exp\int_{e_i(t_n)}^{t_n}\lambda H(s)\,ds$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}C_i(g(t_n))\exp\int_{e_i(t_n)}^{t_n}\lambda H(s)\,ds\leqslant\exp(\lambda M). \tag{27}$$

$\forall\,\varepsilon>0$,存在 λ_ε,使 $e^M<1+\dfrac{\varepsilon}{2}$,由

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{Q(t_n)}{\lambda_\varepsilon H(t_n)}\exp\int_{g(t_n)}^{t_n}\lambda_\varepsilon H(s)\,ds=0,$$

故有 t_n 使

$$\frac{Q(t_n)}{\lambda_\varepsilon H(t_n)}\exp\int_{g(t_n)}^{t_n}\lambda_\varepsilon H(s)\,ds<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

从而由(27)、(28),得

$$\inf_{\substack{t\geqslant T\\ \lambda>0}}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i(g(t))Q(t)H(e_i(t))}{Q(e_i(t))}\exp\int_{e_i(t)}^{t}\lambda H(s)\,ds$$
$$+\frac{1}{\lambda}\frac{Q(t)}{H(t)}\exp\int_{g(t)}^{t}\lambda H(s)\,ds\Big\}\leqslant 1+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$,与条件(18)矛盾,从而有 $T>0$,使

$$\kappa(t)=\frac{Q(t)}{H(t)}>a,\quad t\geqslant T$$

从而有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{g(t)}^{t}Q(s)\,ds>\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{g(t)}^{t}aH(s)\,ds>0$ 说明定理2的条件满足,方程(1)的一切解振动.

推论3　设 $g(t)=t-\tau(\tau>0)$, $0<\sigma_0\leqslant\sigma_i(t)\leqslant\sigma_1(1\leqslant i\leqslant k)$,且满足条件(3)及存在

$$T>t_0+\rho\,(\rho=\max(\sigma_1,\tau)),$$

使

$$\inf_{\substack{t\geqslant T\\ \lambda>0}}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i(t-\tau)Q(t)}{Q(t-\sigma_i(t-\tau))}\exp(\lambda\sigma_i(t-\tau))+$$
$$\frac{1}{\lambda}Q(t)\exp(\lambda\tau)\Big\}>1,$$

则方程(1)的一切解振动.

证明略.

3　例题分析

例1　对于如下中立方程

$$\Big(x(t)-\frac{1}{2}\sin t\cdot x(t-\sqrt{t})\Big)'+\frac{1}{t}x(t-2)=0,$$
$$t\geqslant 2 \tag{29}$$

存在非振动解.

证明　取 $Q(t)=\dfrac{1}{t}$, $g(t)=t-2$, $r(t)=\sqrt{t}$, $C(t)=\dfrac{1}{2}\sin t$, $k=1$.显然定理1的条件(2)与(3)满足.由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\Big[\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{t}{t-2}\Big)^3+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{t}{t-\sqrt{t-2}}\Big)^3\Big]=\dfrac{5}{6}<1$,故可取 $T>t^*=\sup\{t\,|\,t<4,t-\sqrt{t-2}<2\}$,使:$\forall\,t\geqslant T$, $\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{t}{t-2}\Big)^3+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{t}{t-\sqrt{t-2}}\Big)^3<1$,令 $H(t)=Q(t)$, $\lambda_0=3$,则(12)满足,由定理1,式(29)存在非振动解.但由于 $r(t)=\sqrt{t}$ 不满足文献[1]与文献[2]的条件,故由文献[1]与文献[2]无法得到式(29)的非振动解的存在性.

例2　考虑如下方程

$$\big(x(t)-\delta x(t-\sqrt{t})\big)'+\varepsilon x(t-\tau)$$
$$=0,\quad t\geqslant\tau \tag{30}$$

其中 δ、τ 为正常数,且 $\delta<1$, $\delta+\tau e>1$,则方程(30)的一切解振动.

证明　在定理2中,取 $Q(t)=1$, $\sigma(t)=\sqrt{t}$, $g(t)=t-\tau$, $C(t)=\delta$,令 $H(t)=Q(t)=1$,由于 $\delta\exp(\lambda\sqrt{t-\tau})+\dfrac{1}{\lambda}e^{\tau}>\delta+\tau e>1$,从而定理2的条件满足,故式(30)的一切解振动.

同理由文献[1]与文献[2]无法得到这一结论.

参考文献

1　王志成,庚建设.中立型对滞微分方程的振动性.数学学报,1994,(1):129~134.

2　Wu Dulu. Nonoscillation and oscillation of first order neutral equation with variable coefficients. J Mth Anl Appl, 1994, 181: 803-815.

3　俞元洪.中立型对滞微分方程解的振动性.应用数学学报,1991,(3):404~414.

(责任编辑:蒋汉明　邓大玉)