DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.02.002
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (2): 5~ 8, 14

关于退化拟共形映射的分类与边界对应
On the Type and Boundary Correspondence of Degenerate Quasiconformal Mappings

黄新民
Huang Xinmin

(广西大学数学与信息科学系　南宁市西乡塘路 10号　530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要　设 D 是一个边界 $\Gamma\in C^2_\tau(0<\tau\leqslant 1)$ 的有界单连通域,复函数 $q(z)\in C^1_\tau(\bar{D})$,$|q(z)|$ 的法向导数在 $z\in\Gamma$ 时不等于零而对 $z\in \bar{D}$ 成立 $|q(z)|\leqslant 1$,且等号至多对 $z\in\Gamma$ 成立.对于复伸张 $q(z)$ 满足上述条件的 Beltrami 方程的分类及同胚解的边界对应进行了讨论.

关键词　退化　拟共形映射　分类　边界对应

Abstract　Suppose that D is a simply connected region whose boundary $\Gamma\in C^2_\tau(0<\tau\leqslant 1)$, the complex function $q(z)\in C^1_\tau(\bar{D})$, normal derivative of $|q(z)|$ does not equal to zero for $z\in\Gamma$, and $|q(z)|\leqslant 1$ for $z\in\bar{D}$ where equality may hold only at $z\in\Gamma$. Type and boundary correspondence of the homeomorphic solution of the Beltrami equation are discussed under above conditions of complex dilatation $q(z)$.

Key words　Degenerate, Quasiconformal mappings, Type, Boundary correspondence

设 D 是一个有界单连通域,根据文献 [1, 2]已知当 $q(z)$ 满足条件

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in D}|q(z)|<1 \tag{1}$$

时, Beltrami 方程

$$w_{\bar{z}}-q(z)w_z=0 \tag{2}$$

有广义导数满足方程 (2) 的同胚解 $w=h(z)$. 条件 (1) 可称为一致椭圆形条件 (因为方程 (2) 是一个椭圆形复方程).在条件 (1) 下方程 (2) 的同胚解可以连续延拓到闭域 D 上,如果 D 的边界与 $h(D)$ 的边界都是 Jordan 闭曲线则解 $w=h(z)$ 还可延拓为闭域 $\bar{D}$ 上的同胚.

如果 $q(z)$ 只在区域 D 上满足 $|q(z)|<1$ 但一致椭圆形条件 (2) 不成立,则 Beltrami 方程 (2) 的同胚解称为退化的拟共形映射,它的存在性已在很一般的条件下获得解决.例如如果对于 D 中任何紧子集 E 都成立

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in E}|q(z)|\leqslant q_E<1 \tag{3}$$

(当 $E\to D$ 可以有 $q_E\to 1$),则 Beltrami 方程 (2) 的同胚解存在,条件 (3) 被称为局部一致椭圆形条件.李忠[3,4]将退化的拟共形映射区分为两类:第一类有解将 D 同胚的映射为单位圆盘 Δ 而第二类只有将 D 同胚映射成复平面的解. 他证明如果有一个点 $\zeta\in\Gamma$ 使得成立

$$\iint_{D\cap\{|z-\zeta|<r\}}(1-|q(z)|)^{-1}\mathrm{d}\sigma_z<+\infty,$$

则相应的 Beltrami 方程是属于第一类的.如果域 D 是单位圆盘 Δ,他又证明,若存在常数 C 对任意的 $r\in[0,1)$ 与 $\theta\in[0,2\pi]$ 都成立

$$(1-|q(re^{i\theta})|)^{-1}\leqslant C\log\frac{1}{1-r},$$

则方程 (2) 的同胚解还能延拓为 $\bar{\Delta}$ 到自身的同胚解.

在本文中复伸张被要求满足更强的条件,同时对退化的拟共形映射的边界的分类与对应也得出了比较好的结果.下面我们引入记号

1996-02-09收稿。

$R_d = \{k = s + it:\ -d < s < 0,\ -d < t < d\}$,

$l_d = \{k = it:\ -d \leqslant t \leqslant d\}$.

然后证明

引理 **1** 设复函数 $Q(k)$ 满足下列条件

1) $Q(k) \in C^1_T(R_d)$;

2) $k \in \bar{R}\backslash l_d$ 时 $|Q(k)| < 1$, 而 $k \in l_d$ 时 $|Q(k)| = 1$;

3) $\frac{\partial}{\partial s}|Q(k)|\,\Big|_{k=0} \neq 0$;

4) $Q(k) \pm 1 = 0$ 在 l_d 上至多有有限个有限阶(可以不是整数阶的)零点.

如果 $k = g(k)$ 是 Beltrami 方程

$$w_{\bar k} - Q(k) w_k = 0 \tag{4}$$

在域 R_d(对于充分小的 $d > 0$)中的解,则有在 R_d 无穷次可微的函数 $Y = j(k)$ 在域 R_d 中满足 Beltrami 方程

$$Y_{\bar k} - Q_1(k) Y_k = 0, \tag{5}$$

且为 R_d 到 $G_d = j(R_d)$ 的同胚,并且复合函数 $w(Y) = g(j^{-1}(Y))$ 能在域 G_d 中满足 Beltrami 方程

$$w_{\bar Y} - Q_2(Y) w_Y = 0, \tag{6}$$

但这里 $Q_2(Y) \in C_T(\bar{G}_d)$ 并且已在 G_d 中满足一致椭圆形条件(1).

证明 如果 d 充分小,则成立

$$Q(k) = e^{2As + 2i\theta(s,t) + X(s,t)} \quad (k = s + it),$$

这里

1) $2A = \frac{\partial}{\partial s}(\log|Q(k)|\,\Big|_{k=0} > 0$;

2) $\theta(0,t) = T(t) = \frac{1}{2}\arg Q(ti)$;

3) $X(s,t)$ 是一个实函数而 $\lim\limits_{X \to 0^-} \frac{X(s,t)}{s} = 0$ 对任意 $t \in (-d, d)$ 成立. 定义

$$H(k) = u(s,t) + iv(s,t) = \frac{1}{c}\int_{l_d} \frac{T(-if)}{f - k}\, dk, \tag{7}$$

因为 $T'(t)$ 是 Höder 连续的因此 $H(k)$ 与 $H'(k)$ 均在 $R_d\backslash\{-di, di\}$ 连续, $v(0,t) = \mathrm{Im}\, H(ti) = T(t)$, 定义

$$Y = j(k) = \overline{\int_V e^{Ak - H(k)}\, dk} + \int_V e^{-Ak - H(k)}\, dk, \tag{8}$$

这里 V 是一条在 $\bar{R}_d$ 中的终点在 k 的简单弧,容易直接从(8)式证明 $Y = j(k)$ 是无穷次可微的,并在域 R_d 上满足方程(5),这里

$$Q_1(k) = e^{2As + 2iv(s,t)}.$$

现在我们证明如果 d 充分的小则函数 $Y = j(k)$ 是一个从 R_d 到 $G_d = j(R_d)$ 的同胚映射. 记

$$k_1 = s_1 + it_1, \qquad k_2 = s_2 + it_2 \in R_d,$$
$$Y_2 = j(k_2), \qquad Y_1 = j(k_1),$$

因为积分(8)与路径无关,我们可以将积分(8)取为连结 k_1 与 k_2 的直线段. 当 V 为: $k = s + t_0$ (t_0 为固定实数)时:

$$Y_2 - Y_1 = 2e^{-iAt_0}\int_{s_1}^{s_2} e^{-u(s,t_0)}(\mathrm{ch}\,As\cos v(s,t_0) - i\,\mathrm{sh}\,As\sin v(s,t_0))\, ds,$$

因为 $v(s,t) \approx T(0)$ 因此当 d 充分小时 $\mathrm{ch}\,As\cos v(s,t_0)$ 与 $\mathrm{sh}\,As\sin v(s,t_0)$ 中至少有一个保持固定的符号,因而此时当 $s_2 \neq s_1$ 时对所有固定的 t_0 都有 $Y_2 \neq Y_1$,即对于充分小的 d 映射(8)在水平线上是一对一的.

当 $s = s_0$ 为常数时,

$$Y_2 - Y_1 = -2i\int_{t_1}^{t_2} e^{-u(s_0,t) - iAt}(\mathrm{sh}\,As_0\cos v(s_0,t) - i\,\mathrm{ch}\,As_0\sin v(s_0,t))\, dt,$$

同样由于 d 充分小时 $v(s,t) \approx T(0)$, 如果 $T(0) \neq kc$ 则映射(8)在 d 充分小时对于所有固定的 s_0 在此竖直线段上 Y 与 t 是一对一的,若 $T(0) = kc$,则将积分(8)的起点 $t = bi$ 取在 l_d 上,可以得出

$$j(ti) = 2\int_b^t e^{-2iAf - u(0,f)}\sin T(f)\, df \quad (-d \leqslant f \leqslant d),$$

由于 $\sin T(f)\cos 2Af$ 与 $\sin T(f)\sin 2Af$ 中至少有一项是保持确定的符号的,因而映射(8)在边界 l_d 上也是一对一的,因而由广义幅角原理当 d 充分小时可以知道映射(8)将在 $\bar{R}_d$ 的各条边界上是一对一的,因而当 d 充分小时映射(8)是在 R_d 上为同胚的映射. 又因为

$$|Q_2(Y)| = \left|\frac{w_{\bar Y}}{w_Y}\right| = \left|\frac{Q(k) - \overline{Q_1(k)}}{1 - \overline{Q_1(k)}Q(k)}\right| =$$
$$|Q(k)|\left|\frac{1 - e^{2i(v(s,t) - \theta(s,t)) - X(s,t)}}{1 - e^{4As + X(s,t) + 2i(\theta(s,t) - v(s,t))}}\right|,$$

如果 d 充分小,则

$$|Q_2(Y)| \approx$$
$$|Q(k)|\left|\frac{X(s,t) - 2i(v(s,t) - \theta(s,t))}{4As + X(s,t) + 2i(\theta(s,t) - v(s,t))}\right|,$$

因为

$$\left|\frac{v(s,t)-\theta(s,t)}{s}\right| = \left|\frac{v(s,t)-T(t)}{s} - \frac{\theta(s,t)-T(t)}{s}\right|$$

在闭域 $\bar R_d$ 上是有界的,而 $\lim_{X\to 0^-}\frac{X(s,t)}{s}=0$,因此存在 $q_0>0$使得成立

$$|Q_2(Y)|\leqslant q_0<1 \quad (Y\in G_d).$$

因此 d充分小时 $Q_2(Y)$ 在 R_d 上满足一致椭圆形条件的.下面我们再证明 $Q_2(Y)\in C_T(\bar G_d)$.
由

$$Q_2(Y(k)) = \frac{Y_k(Q(k)-Q_1(k))}{\bar Y_k(1-\overline{Q_1(k)}Q(k))}$$

容易证明如果 $Q(k)\in C^1(\bar R_d)$ 则 $Q_2(Y(k))\in C_T(\bar R_d)$,因此我们只需要证明 $k=j^{-1}(Y)\in C_T(\bar G_d)$. 便可以得出 $Q_2(Y)\in C_T(\bar G_d)$.由于对任意 $Y_0\in G_d$有一个 Y_0的邻域使得函数 $k=j^{-1}(Y)$在这个邻域中满足一致椭圆形条件的,故只需考虑 $Y\in Y(l_d)$ 的情形予以证明就可以了.现在设 $Y_0=j(0)$ 而 $Y_1=j(k_1)$,路径 V是一条起点在 $k_0=0$而终点在 k_1的直线段.记 $e=\{k=fe^{i\theta}: 0<f<|k_1|, c-\theta_0<\theta<c-\theta_0\}\cap R_d(0<\theta_0<\frac{c}{2})$,对任意 $k=s+it\in e$成立 $-s\geqslant\cos\theta_0|k|$ 与 $|t|\geqslant\sin\theta_0|k|$.如果 $T(0)\neq k^c$而 d又充分小,$V\subset e$,则存在 $M_1>0$使得成立

$$|Y_1-Y_0|\geqslant M_1\int_V(e^{-As}+e^{As})|dk|\geqslant M_1|k_1-0|,$$

对于 $V\subset R_d-e$则存在 $M_2>0$使得

$$|Y_1-Y_0|\geqslant M_2\int_d(e^{-As}-e^{As})|dk|\geqslant$$
$$-2AM_3\int_V s|dk|\geqslant AM_2\cos\theta_0|k_1-0|^2,$$

所以 $Y=j(k)\in C_T(\bar R_d)$,如果 $t=0$是 $T(0)-k^c=0$的λ阶零点($\lambda>0$),则对于 $V\subset e$仍成立 $|Y_1-Y_0|\geqslant M_1|k_1-0|$,而对于 $V\subset R_d-e$情形则有

$$|Y_1-Y_0|\geqslant M_3\int_d|1-e^{2As+2iv(s,t)}||dk|\geqslant$$
$$M_4\int_V|v(s,t)||dk|\geqslant M_5\int_V|T(t)||dk|\geqslant$$
$$M_6\int_V|t|^\lambda|dk|\geqslant M_6\sin^\lambda\theta_0|k_1-0|^{\lambda+1}.$$

因此也成立 $Y=j(k)\in C_T(\bar R_d)$,由此便证明了 $Q_2(Y)\in C_T(\bar R_d)$.

注 如果在 l_d上有 $Q(ti)\equiv 1$即 $T(ti)\equiv k^c$,则映射(8)成为

$$Y=j(k)=\frac{1}{A}(e^{Ak}-e^{-Ak}).$$

容易证明此时映射 $Y=j(k)$仍是从 R_d到 G_d的同胚映射,但此时 $Y=j(k)$映射 l_d为一个点.

定理 2 设 $q(z)$满足下列条件:

1) $q(z)\in C^1(\bar\triangle)$;

2) 当 $z\in\bar\triangle$时成立 $|q(z)|\leqslant 1$等号至多只在 $z\in\partial\triangle$时成立;

3) 当 $|q(z_0)|\,|_{z_0\in\partial\triangle}=1$时有 $\frac{\partial|q(z)|}{\partial|z|}\neq 0$;

则

1) Beltrami方程(2)属于第一类的当且仅当存在一个点 $z_0\in\partial\triangle$使得成立 $q(z_0)\neq z_0^2$;

2)如果 $q(z)|_{z\in\partial\triangle}-z^2=0$只在有限个点上成立并且这每一个零点都是有限阶的零点,则 Beltrami方程的每一个同胚解 $w=h(z)$能连续同胚延拓到闭单位圆盘 $\bar\triangle$上并且 $h(z)\in C^1(\bar\triangle)$,而反函数 $z=h^{-1}(w)\in C_T(\bar G)(G=w(\triangle))$.如果在 $\partial\triangle$的子弧 e上恒有 $|q(z)|\,|_{z\in e}=z^2$,则 $h(z)$映射 e为一个点.

证明 如果 z_0是单位圆周上子弧 e上的一个点使得 $|q(z)|\,|_{z\in e}\equiv 1$,则存在一个 $d>0$使得映射 $k=\log z-\log z_0$映射域 $D_d=\{z: e^{-d}<|z|<1, -d<\arg z-\arg z_0<p\}$为引理 1的域 R_d.令

$$Q(k)=q(z_0e^k)\frac{\overline{z_0e^k}}{z_0e^k}$$

则容易证明定理 2的条件是与引理 1的条件是等价的.使用与前面相同的记号,则 Beltrami方程(2)的任意一个解 $k=h(z)$能够表示为下面的复合

$$k=h(z)=k(j(\log z-\log z_0)),$$

因为函数 $k=\log z-\log z_0$是在点 z_0处连续的而 $Y=j(k)$是在点 $k=0$是连续的,函数 $k=k(Y)$满足方程(6)其中 $Q_2(Y)$是满足一致椭圆形条件的,因此函数 $k=k(Y)$是在点 $Y_0=j(0)$连续的,因而函数 $k=h(z)$是在点 $z=z_0$连续的,故对于这种情形函数 $k=h(z)$在点 $z=z_0$是连续的.

当 $z_0\in\partial\triangle$而 $|q(z_0)|<1$时存在 z_0的一个邻域 e使得对于任意点 $z\in e\cap\triangle$成立 $|q(z)|\leqslant q_0<1$(因为已假设 $q(z)$是在 $\bar\triangle$上是连续的),故在此邻域上 $q(z)$满足一致椭圆形条件,对于这种情形定理 2是容易证明的.如果 e_1与 e_2是两条单位圆周上具有公共端点 z_0的子弧,并且 $|q(z)|\,|_{z\in e_2}\equiv 1$而 $|q(z)|\,|_{z\in e_1\setminus\{z_0\}}<1$.我们将用下面的方法来证明:在 z_0处作 $\partial\triangle$的一条切线 l,由于我们可以用任意的

方法将 $q(z)$ 连续延拓到 l_0,因而此时的定理 2可以归结为引理 1的在 l 上成立 $|q(z)|\equiv 1$的情形 (对于部分边界为圆弧部分边界为直线可以通过共形映射象上面那样解决). 对于 $z\in$ e$_1\cup$ e$_2\setminus\{z_0\}$时 $|q(z)|<1$ 而 $|q(z_0)|=1$的情形可以使用相同的方法延拓 $q(z)$. 我们只需对于边界上恒有 $|q(z)|\equiv 1$的情形予以讨论 , 下面我们只考虑在边界 $\partial\triangle$ 上恒成立 $|q(z)|\equiv 1$的情形 .

如果 $z_0\in\partial\triangle$ 而 $q(z_0)\neq z_0^2$,则存在中心在 z_0的子弧 e使得对于 $z\in$ e都有 $q(z)\neq z^2$. 使用与上面相同的记号则 Q(k) 不是正数 , 故 l_d(l_d 是中心在 z_0 的 $\partial\triangle$ 的子弧 e在映射 k $=\log z-\log z_0$下的象) 与 j(l_d) 之间的对应是一对一的 . 因为 $w=w$(Y)满足方程 (6) (其中的 Q_2(Y) 满足一致椭圆形条件), 故任意同胚解 $w=w$(Y)能够同胚地延拓到 e上 , 故 j(e) 不是一个点 , 因而由 Riemann映射定理 h($\triangle$) 能被共形地映射为单位圆盘 $\triangle$,所以这个 Beltrami方程是属于第一类的 .

相反如果成立 $q(z)\big|_{z\in\partial\triangle}\equiv z^2$,则已知对于任意 $z_0\in\partial\triangle$ 都有一个中心在 z_0的开弧 e(z_0), 使得 $w=$ h(z) 映射 e(z_0) 为一个点 . 弧集 {e(z): $z\in\partial\triangle$}组成了 $\partial\triangle$ 的开覆盖 , 故能选出有限个点 $z_1, z_2,\cdots, z_n$ 使得弧集 $\bigcup_{i=1}^{n}$ e(z_i) 覆盖了 $\partial\triangle$. 因为所有这些弧都两两相交 , 故象集 h($\partial\triangle$) 只能是一个点 . 而函数

$$w(z)=\frac{1}{\text{h}(z)-\text{h}(\partial\triangle)}$$

为满足方程 (1) 的将单位圆盘 $\triangle$ 映射为全平面的同胚解 .

如果 $q(z)\big|_{z\in\partial\triangle}-z^2=0$只在有限个点成立并且每一个零点都是有限阶的零点 , 使用同上面一样的符号 , 我们可以证明对于每一个 $z_0\in\partial\triangle$ 都有一个 $\partial\triangle$ 子弧 e(z_0) 使得映射 $w=$ h(z) 在这一子弧 e(z_0) 上是一对一的 . 使用有限覆盖定理可以证明映射 $w=$ h(z) 在边界 $\partial\triangle$ 是一对一的 . 注意引理 1中的 j(k) 是属于 $C^\infty(\bar{R}_d)$ 的而方程 (6) 中的复伸张 Q_2(Y) 是属于 $C_T(\bar{G}_d)$ 的并且满足一致椭圆形条件 , 故可以得出 w(Y)$\in C^1(\overline{\triangle})$ 而 $w(z)\in C^1(\overline{\triangle})$. 由于 w(Y)满足方程 (6) 而那里的 Q_2(Y) 满足一致椭圆形条件 , 因此可得 w(Y)的逆函数 Y$=$ Y(w) 是属于 $C_T(\overline{\triangle})$ 的 , 由于引理 1我们得到 k $=$ j^{-1}(Y)$\in C_T(\bar{G})$, 故所以有 $z=z(w)=z_0e^{\text{j}^{-1}(w)}\in C_T(\bar{G})$.

注记　定理 2的条件是与文献 [3, 4]中的条件是不相同的 . 事实上在满足定理 2的条件的复伸张 $q(z)$ 对于 $z\in$ V ($\partial\triangle$ 的子弧) 成立 $|q(z)|=1$及 $\dfrac{\partial|q(z)|}{\partial|z|}\neq 0$,则对于任意 $z_0\in$ V当 $z=re^{i\theta}\to z_0$时成立

$$1-|q(re^{i\theta})|=1-r+O(1-r),$$

所以

$$\iint_{\triangle}(1-|q(z)|)^{-\lambda}\,\mathrm{d}e\begin{cases}<+\infty, & \text{当 }\lambda<1\\ =+\infty, & \text{当 }\lambda\geqslant 1\end{cases}\qquad(9)$$

因而这里的 $q(z)$ 不能满足文献 [3]的条件 .

上面的结论容易推广到一般的单连通域:

定理 3　设 D是一个边界 $\Gamma\in C^{1}(0<T\leqslant 1)$的有界单连通域 , 并设边界的参数式为 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$. 如果 $q(z)$ 满足下面的条件:

1) $q(z)\in C^1(\bar{D})$;

2) 对于 $z\in\bar{D}$成立 $|q(z)|\leqslant 1$,且等式至多在 $z\in\Gamma$能够成立;

3) 如果 $z_0\in\Gamma$时有 $|q(z_0)|=1$,则 $|q(z)|$ 在点 $z=z_0$处的法向导数不为零;

4) $q(z(t))\dfrac{\overline{z'(t)}}{z'(t)}+1=0$只能在有限个点上成立 , 且每一个零点都是有限阶的零点;

则有下面结论:

1) Beltrami方程 (2) 的每一个解 $w=w(z)\in C^1(\bar{D})$;

2) Beltrami方程 (2) 有同胚解 $w=$ h(z) 同胚映射 D为 $\triangle$,则解 $w=$ h(z)$\in C^1(\bar{D})$并且能够延拓为 $\bar{D}$到 $\overline{\triangle}$ 的同胚 . 其逆函数 $z=$ h$^{-1}(w)\in C_T(\overline{\triangle})$.

使用共形映射及定理 2容易证明定理 3.

注记　(1) 利用共形映射与公式 (9) 容易证明如果 $\lambda<1$则有

$$\iint_D(1-|q(z)|)^{-\lambda}\,\mathrm{d}e_z<+\infty;$$

(2) 如果在边界 $\partial\triangle$ 的一条子弧 e上成立 $q(z)\big|_{z\in e}=z^2$,则解 k $=$ k(z) 映射 e为一个点 , 如果在整条边界上成立 $q(z)\equiv z^2$,则同胚解 k $=$ k(z) 映射 $\triangle$ 为全平面 .

例　下面的例子都是在单位圆盘上讨论的:

1. 函数 $w(z)=\dfrac{2z}{1+|z|^2}$ 是一个 $\triangle$ 到 $\triangle$ 的同胚 , 并且满足方程:

$$w_{\bar{z}}+z^2w_z=0.$$

2. 如果 $0<a<1$,则函数

$$w(z)=\frac{1}{\dfrac{1-a^2}{a}\log\dfrac{z-a}{z(1-a\bar{z})}+\dfrac{1-|z|^2}{z}},$$

(下转第 14页 Continue on page 14)

的 h,使 $h\circ F = F\circ h$,但 R上的恒等映射 $id_R \in H_{FF}$ 也使 $id_R \circ F = F \circ id_R$,所以 $\bar{H}\circ H = id_R$,同理可证 $H\circ \bar{H} = id_R$,从而 H是 R上的同胚,且 $H(x+1) = H(x)+1$,令 $h(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i H(x)}\ (x\in R)$,则 $h\in G^0(S^1)$,且是一个同胚.由 $H\circ F = G\circ H$得 $\pi\circ H\circ F = \pi\circ G\circ H$,从而 $h\circ f = g\circ h$,这说明 f与 g拓扑共轭.

主要定理的证明 必要性 若 f有 n阶迭代根 g,则 $f = g^n$.令 $d = \deg(g)$,由 $\deg(f) = \deg(g^n) = (\deg(g))^n$ 可得 $k = d^n$.

充分性 如果存在整数 d,使 $k = d^n$,令 $g(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi idx}\ (x\in R)$,那么 $g^n(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi id^n x} = e^{2\pi ikx}$,它是以 k为映射度的扩张自映射,由引理知存在同胚 $h\in G^0(S^1)$,使 $h\circ f = g^n\circ h$,令 $p = h^{-1}\circ g\circ h$,则 $f = p^n$,从而 f有 n阶迭代根.

参考文献

1 Rice R E et al, When is $f(f(z)) = aZ^2 + bZ + C$? Amer. Math. Monthly, 1980, 87: 252~ 263.

2 张景中,杨 路.论逐段单调连续函数的迭代根.数学学报, 1983, 26 (4): 398~ 412.

3 Isaacs R. Iterates of fractional order, Canad. J. Math, 1950, 2: 409~ 416.

4 麦结华.圆周上自同胚有 n阶迭代根的条件.数学学报, 1987, 30 (2): 280~ 283.

5 朱德明,韩茂安.光滑动力系统.上海: 华东师范大学出版社, 1993, 3.

(责任编辑: 蒋汉明 唐铃弟)

(上接第 8页 Continue from page 8)

是一个从△到整个复平面 E的同胚并且满足方程:

$$w_{\bar z} - z^2\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2 w_z = 0.$$

3. 函数 $w(z) = \dfrac{z}{1+\sqrt{1-|z|^2}}$ 同胚映射△为△并且满足方程

$$w_{\bar z} - \frac{z^2}{(1+\sqrt{1-|z|^2})^2} w_z = 0,$$

注意 $q(z) = \dfrac{z^2}{(1+\sqrt{1-|z|^2})^2}$ 在 $\partial\triangle$ 上满足 $q(z) = z^2$,但是定理 2在此不能成立,原因在于 $q(z)$只在边界 $\partial\triangle$不可导.

4. 函数是一个从△到△的同胚并且满足方程:

$$w_{\bar z} - \frac{z(1+z)}{1+\bar z} w_z = 0,$$

但是 $w(z)$不能连续延拓到闭单位圆盘 $\bar\triangle$ 上,故定理 2在此不能成立.注意复伸张 $q(z)$只在一个点 $z = -1$上不满足定理 2的条件.这个例子表明,如果当 $r\to 1$时如果 $1-|q(re^{i\theta})|\to 0$太快,则 Beltrami方程的同胚解要有到闭单位圆盘上的连续(或者同胚)延拓,必须要有更强的条件才行.

参考文献

1 Ahlfors L. Lecture on quasiconformal mappings. Princeton, 1966.

2 Lehto O. Remarks on reneralized Beltrami equations and conformal mappings. Proc. Romanian-Finish Seminal on Teichmuller Spaces and Quasiconformal Mappings, 1969. 203~ 241.

3 李 忠.关于 Beltrami同胚解的一点注记.北京大学学报(自然科学学报), 1989, 25 (1), 8~ 17.

4 Li Zhong, Locally Quasiconformal Mappings and the Dirichlet Problem of Degenerating Elliptic Equations. Complex Variable Theory, 1993, (23): 3~ 4, 231~ 247.

(责任编辑: 蒋汉明 邓大玉)