

# 非均匀(II)型三角剖分下双周 期二次样条空间 $\tilde{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})^*$ Double Periodic Quadratic Spline Space $\tilde{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$ over the Non-regular Type-2 Triangulation

刘焕文  
Lui Huanwen

舒 适  
Shu Shi

(广西民族学院数学系  
南宁市西乡塘 530006)

(湘潭大学数学系  
湖南湘潭 411105)

(Dept. of Math., Guangxi Institute for Nationalities,  
Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006)

(Dept. of Math., Xiangtan  
University, Xiangtan, Hunan, 411105)

**摘要** 设  $\Omega = [0, x_m] \otimes [0, y_n]$ ,  $\Omega$  的熟知的非均匀(I)、(II)型三角剖分分别记为  $\Delta_{mn}^{(i)}, i = 1, 2$ .  $\Delta_{mn}^{(i)}$  上的分片二元  $k$  次  $C^1$  多项式的全体记为  $S_2^k(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)})$ , 称为二元  $k$  次一阶光滑的样条函数空间. 进一步, 引入其子空间  $\tilde{S}_2^k(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)}) = \{s \in S_2^k(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)}); D^\alpha s(\cdot, 0) = D^\alpha s(\cdot, y_n), D^\alpha s(0, \cdot) = D^\alpha s(x_m, \cdot), \alpha = 0, 1\}$ . 称为双周期  $k$  次样条空间. 本文给出了  $\Omega$  的非均匀(II)型三角剖分  $\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}$  下双周期二次样条空间  $\tilde{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的维数及一组基底.

**关键词** 非均匀(I)型三角剖分 双周期二次样条空间 维数 基底

**Abstract** Let  $\Omega = [0, x_m] \otimes [0, y_n]$ , the well-known nonregular type-2 triangulation of  $\Omega$  is denoted by  $\Delta_{mn}^{(i)}$ , and the space of piecewise  $C^1$  quadratic polynomials is denoted by  $S_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)})$ . Define  $\tilde{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)}) = \{s \in S_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(i)}); D^\alpha s(\cdot, 0) = D^\alpha s(\cdot, y_n), D^\alpha s(0, \cdot) = D^\alpha s(x_m, \cdot), \alpha = 0, 1\}$ , called double periodic quadratic spline space. In this paper, the dimension and a basis of the space  $\tilde{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  were given.

**Key words** nonregular type-2 triangulation, double periodic quadratic spline space, dimension, basis

所谓  $\Omega$  的非均匀(II)型三角剖分  $\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}$  即是在  $x = x_i, i = 0, 1, \dots, m, y = y_j, j = 0, 1, \dots, n$  形成的矩形剖分基础上, 再连结每个小矩形的两条对角线而得, 其中规定  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m, 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n$ . 显然  $\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}$  将  $\Omega$  分成  $4mn$  个小三角形单元. 以后总记  $h_i = \nabla x_i, i = 1, \dots, m, k_j = \nabla y_j, j = 1, \dots, n$ , 并记指标集  $I = \{(i, j); i = 0, 1, \dots, m+1, j = 0, 1, \dots, n+1\}$ .

二元二次样条函数空间  $S_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  由满足如下条件的  $s(x, y)$  组成:

i)  $s \in C^1(\Omega)$ ;

ii) 在  $\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}$  的每一小三角形上,  $s(x, y) \in P_2$ , 其中  $P_2$  为二元二次完全多项式的全体.

熟知<sup>[8]</sup>,  $\dim S_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}) = (m+2)(n+2) - 1$ . 为给出基底, 文献[8]首先构造了它的一个  $B$  样条函数, 记为  $B_{ij}(x, y)$ , 其中  $\text{supp } B_{ij}$  如图 1 所示. 在此支集上,  $B_{ij}(x, y)$  由标明在图中各三角形单元上各顶点和各边中点的值唯一确定. 图 1 中,  $A_i = h_{i-1}/(h_i + h_{i-1}), A'_i = 1 - A_i, B_j = k_{j-1}/(k_j + k_{j-1}), B'_j = 1 - B_j$ , 进一步, 文献[8]给出了

**引理 1** 设

$$x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < \dots < x_m < x_{m+1} < x_{m+2}, \quad (1)$$

$$y_{-2} < y_{-1} < 0 = y_0 < \dots < y_n < y_{n+1} < y_{n+2}.$$

则对  $\forall (i_0, j_0) \in I, A = \{B_{ij}(x, y); (i, j) \in I \setminus \{(i_0, j_0)\}\}$  构成  $S_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的一组基.

需要指出的是, 引理 1 中的  $x_{-2}, x_{-1}, x_{m+1}$ ,

1996-03-13 收稿.

\* 广西民族学院青年科研基金资助课题.

$x_{m+2}$  及  $y_{-2}, y_{-1}, y_{n+1}, y_{n+2}$  在满足式(1)的前提下可以任意选取. 本文我们要求  $x_{-1}, x_{m+1}, y_{-1}, y_{n+1}$  满足  $h_0 = h_1, h_{m+1} = h_m, k_0 = k_1, k_{n+1} = k_n$ . 另外为行文简便, 仅讨论  $h_1 = h_m, k_1 = k_n$  的情形, 显然这并不影响剖分  $\bar{\Delta}_{mn}^{(2)}$  的一般性.

$S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$ , 有如下表示(规定  $C_{00} = 0$ )

$$s = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} C_{ij} B_{ij}(x, y). \quad (2)$$

利用  $B_{ij}$  在其支集上各三角形单元上诸顶点及诸边中点的值, 同时注意到  $A_1 = A_1' = A_{m+1} = A_{m+1}' = 1/2$ , 立即得

$$E_j s = 0, j = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow (C_{mj} + C_{m+1j} - C_{0j} - C_{1j}) B_{j+1}' + (C_{m+1j+1} + C_{m+1j+2} - C_{0j+1} - C_{1j+1}) B_{j+1} = 0$$

$$F_j s = 0, j = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow (C_{mj} + C_{m+1j} - C_{0j} - C_{1j}) B_{j+1}' + (C_{mj+2} + C_{m+1j+2} - C_{0j+2} - C_{1j+2}) B_{j+1} = 0$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

经适当计算, 上面两方程组可合并为等价的简洁形式:

$$C_{0j} + C_{1j} - C_{mj} - C_{m+1j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n+1 \quad (3)$$

为求  $L_j s = 0$  的等价条件, 需计算  $D_x B_{ij}(x, y)$  在点  $(x_{i-1}, y_{j-1})$ 、 $(x_i, y_{j-1})$  和  $(x_i, y_j)$  处的值. 注意到  $B_{ij} \in C^1(\Omega)$ , 所以其偏导数等于任意方向的方向导数, 故对任意剖分点  $(x_i, y_j)$  有

$$D_x s(x, y)|_{(x_i, y_j)} = \frac{d}{dx} s(x, y)|_{x=x_j}. \text{ 因而可采用以下方法求 } D_x B_{ij}(x, y).$$

设在端点为  $(x_{i-1}, y_{j-1})$  和  $(x_i, y_{j-1})$  的线段上,  $B_{ij}(x, y_{j-1}) = ax^2 + bx + c$ , 则由图 1 有

$$\begin{cases} ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c = A_i B_j, \\ ax_i^2 + bx_i + c = A_{i+1}' B_j, \\ a(x_i + x_{i-1})^2/4 + b(x_i + x_{i-1})/2 + c = (2 + A_i + A_{i+1}') B_j/4, \end{cases}$$

变形为

$$\begin{cases} a(x_i + x_{i-1})h_i + bh_i = (A_{i+1}' - A_i) B_j \\ ah_i^2 = (A_i + A_{i+1}' - 2) B_j \end{cases}$$

于是立即有

$$D_x B_{ij}(x_{i-1}, y_{j-1}) = \frac{d}{dx} B_{ij}(x, y_{j-1})|_{x=x_{i-1}} = 2ax_{i-1} + b = 2ax_{i-1} + (A_{i+1}' - A_i) B_j/h_i - a(x_i + x_{i-1}) = -ah_i + (A_{i+1}' - A_i) B_j/h_i = 2(1 - A_i) B_j/h_i$$

类似地

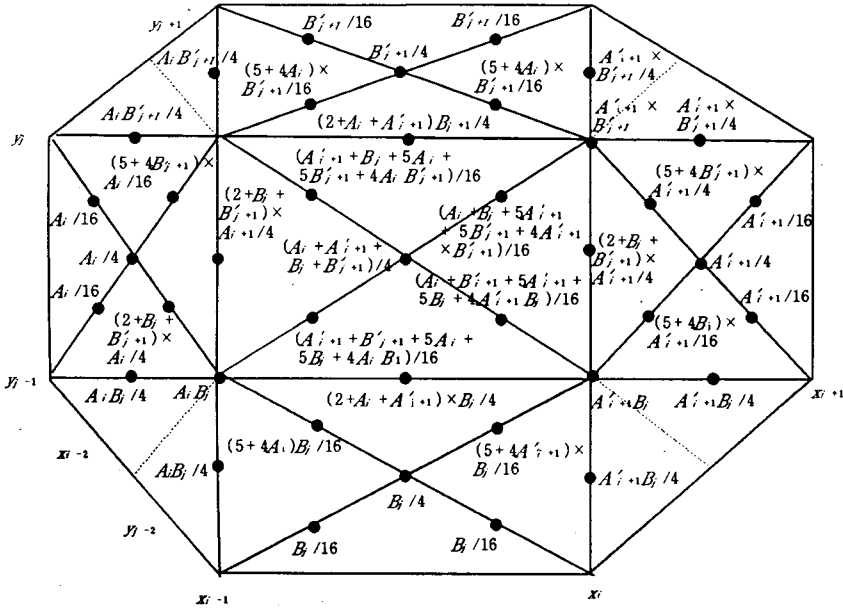


图 1 Fig. 1

引入双周期二次样条空间  $S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$ , 它由满足如下条件的所有  $s(x, y)$  组成:

i)  $s \in S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$ ;

ii)  $D_x^i s(0, \cdot) = D_x^i s(x_m, \cdot), D_x^i s(\cdot, 0) = D_x^i s(\cdot, y_n), i = 0, 1$ .

以上条件 ii) 称为双周期边界条件, 易见  $S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$  是  $S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的满足双周期边界条件的线性子空间.

### 1 $\dim \tilde{S}_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)})$ 的上界

引入线性泛函:

$$E_j s = s(0, y_j) - s(x_m, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

$$F_j s = s(0, (y_j + y_{j-1})/2) - s(x_m, (y_j + y_{j-1})/2), \quad j = 1, \dots, n.$$

$$L_j s = D_x s(0, y_j) - D_x s(x_m, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

$$E_i' s = s(y_i, 0) - s(x_i, y_n), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

$$F_i' s = s((x_i + x_{i-1})/2, 0) - s((x_i + x_{i-1})/2, y_n), \quad i = 1, \dots, m.$$

$$L_i' s = D_y s(x_i, 0) - D_y s(x_i, y_n), i = 0, 1, \dots, m.$$

记它们的全体为  $\Lambda$ , 则不难推得,

$$\tilde{S}_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)}) = \{s \in S_2^1(\bar{\Delta}_{mn}^{(2)}) : \lambda s = 0, \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

在引理 1 中取  $(i_0, j_0) = (0, 0)$ , 则对  $\forall s \in$

$$D_x B_{ij}(x_i, y_{j-1}) = 2(A'_{i+1} - 1)B_j/h_i,$$

$$D_x B_{ij}(x_{i-1}, y_j) = 2(1 - A_i)B'_{j+1}/h_i,$$

$$D_x B_{ij}(x_i, y_j) = 2(A'_{i+1} - 1)B'_{j+1}/h_i,$$

代入求偏导数后的(2)式,注意到  $h_0 = h_1, h_{m+1} = h_m$ , 则得

$$L_j S = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow (C_{0j+1} - C_{mj+1})B_{j+1} + (C_{0j} - C_{mj})B'_{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

联立式(3)、(4),同时注意到,  $C_{00} = 0$ ,可解得

$$C_{0j} = C_{mj} - \beta_j C_{m0} \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (5)$$

$$C_{1j} = C_{m+1j} + \beta_j C_{m0} \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

其中  $\beta_j = (-1)^j k_j/k_1$ .

完全类似地分析,可推出与  $E_i' s = 0, F_i' s = 0$  及  $L_i' s = 0$ , 的等价方程组为:

$$C_{i0} = C_{in} - \alpha_i C_{0n} \quad i = 1, \dots, m+1. \quad (7)$$

$$C_{i1} = C_{in+1} + \alpha_i C_{0n} \quad i = 0, 1, \dots, m+1. \quad (8)$$

$$a_i = (-1)^i h_i/h_1.$$

这样,我们就得到了  $s \in \mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的充要条件是:  $s(x, y)$  的表示式(2)中的系数  $C_{ij}$  应满足方程组(5)~(8). 方程组(5)~(8)中,有些  $C_{ij}$  在左右两边同时出现. 若此,将右边的这样的  $C_{ij}$  用左边已解出的形式代入,整理化简为

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{01} = C_{mn} + C_{mn+1}, \\ C_{10} = C_{mn} + C_{m+1n}, \\ C_{11} = C_{m+1n+1} - C_{mn}, \\ C_{i0} = C_{in} - \alpha_i [C_{mn} - (-1)^n C_{m0}], \\ \quad i = 2, 3, \dots, m-1, m+1 \\ C_{i1} = C_{in+1} + \alpha_i [C_{mn} - (-1)^n C_{m0}], \\ \quad i = 2, 3, \dots, m, m+1 \\ C_{0j} = C_{mj} - \beta_j C_{m0}, \\ \quad j = 2, 3, \dots, n, n+1 \\ C_{1j} = C_{m+1j} + \beta_j C_{m0}, \\ \quad j = 2, 3, \dots, n, n+1 \\ \{1 - (-1)^{m+n}\} C_{m0} = \{1 - (-1)^m\} C_{mn}. \end{array} \right. \quad (9)$$

据此可知,在  $s(x, y)$  的展开式(2)中,相应于上面等式左边系数  $C_{ij}$  的项  $C_{ij} B_{ij}$  可由相应于等式右边系数的项的线性组合来代替. 于是可确定  $s$  的展开式中不同样条函数的个数上界,亦即  $\dim \mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的上界. 我们有

**定理 1** 对任何正数  $m, n$ , 有

$$\dim \mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}) \leq mn + ((-1)^m + (-1)^n)_+^0.$$

其中  $x_+^0$  为阶梯函数,  $x > 0$  时取值为 1, 否则为 0.

**证明** i) 若  $m, n$  同为偶数, 则式(9)中最后一式变为恒等式, 故解出的  $C_{ij}$  共有  $2m + 2n + 2$  个, 而  $\dim \mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)}) = mn + 2m + 2n + 3$  所以  $s(x, y)$  展开式(2)中所含不同样条个数至多为

$$(mn + 2m + 2n + 3) - (2m + 2n + 2) = mn + 1$$

即是说,任意  $s \in \mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  可表示为至多  $mn + 1$  个样条函数的线性组合, 至于这  $mn + 1$  个样条函数属于  $\mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  是显而易见的. 结论成立.

ii) 若  $m, n$  不同时为偶数, 此时方程组(9)最后一式变为

$$\begin{array}{ll} C_{m0} = C_{mn} & m \text{ 奇 } n \text{ 偶时.} \\ C_{m0} = 0 & m \text{ 偶 } n \text{ 奇时.} \\ C_{mn} = 0 & m, n \text{ 全为奇时.} \end{array}$$

可见,能解出的系数共有  $2m + 2n + 3$ , 此时结论亦成立.

## 2 空间 $\mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$ 的代数性质

这一节,我们利用  $\mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的  $B$  样条基的线性组合来构造空间  $\mathcal{S}_2^1(\overline{\Delta}_{mn}^{(2)})$  的基底, 注意到维数受  $m, n$  的影响, 故分情况讨论.

i) 若  $m, n$  同为偶数, 令

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{ij} = B_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m-1, 2 \leq j \leq n-1, \\ B_{mj} = B_{mj} + B_{0j}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ B_{m+1j} = B_{m+1j} + B_{1j}, \quad 2 \leq j \leq n-1, \\ B_{in} = B_{in} + B_{i0}, \quad 2 \leq i \leq m-1, \\ B_{in+1} = B_{in+1} + B_{i1}, \quad 2 \leq i \leq m-1, \\ B_{m0} = \sum_{i=2}^{m+1} \alpha_i (B_{i0} - B_{i1}) + \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j (B_{1j} - B_{0j}), \\ B_{mn} = B_{mn} + B_{01} + B_{0n} + B_{m1} + \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i (B_{i1} - B_{i0}), \\ B_{mn+1} = B_{mn+1} + B_{01} + B_{0n+1} + B_{m1}, \\ B_{m+1n} = B_{m+1n} + B_{10} + B_{1n} + B_{m+10}, \\ B_{m+1n+1} = B_{m+1n+1} + B_{11} + B_{1n+1} + B_{m+11}, \end{array} \right. \quad (10)$$

以上  $\tilde{B}_{ij}$  的个数为  $mn + 1$ , 记它们的全体为  $A_1$

ii) 若  $m, n$  同为奇数, 将  $A_1$  中的  $\tilde{B}_{mn}$  去掉, 改  $\tilde{B}_{m0}$  为以下形式

$$\tilde{B}_{m0} = \sum_{i=2}^{m+1} \alpha_i (B_{i1} - B_{i0}) + \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j (B_{1j} - B_{0j}),$$

其余不变, 这样得到的  $mn$  个样条全体记为  $A_2$

iii) 若  $m$  为奇数,  $n$  为偶数, 将  $A_1$  中的  $\tilde{B}_{mn}$  去掉, 改

$\tilde{B}_{mn}$  为以下形式

$$\tilde{B}_{m0} = B_{m0} + B_{0n} + B_{mn} + B_{10} + \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j (B_{1j} - B_{0j}),$$

如此得到的  $mn$  个样条全体记为  $A_3$ .

iv) 若  $m$  为偶数,  $n$  为奇数, 记  $A_i = A_1 \setminus \{\tilde{B}_{mn}\}$

我们有以下

**定理 2** 设  $h_1 = h_m, k_1 = k_n$ , 则对任何正整数  $m, n$  有

$$\dim \tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = mn + ((-1)^m + (-1)^n)_+$$

且以上在四种情形下构造的  $A_1, A_2, A_3, A_4$  恰是  $\tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  在相应各情形下的基底.

**证明** 仅证明  $m, n$  同为偶数的情形. 因为  $A_1$  中的样条共  $mn + 1$  个, 而由定理 1 知, 此时  $\dim \tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) \leq mn + 1$ , 故我们只需证明  $\tilde{B}_{ij} \in \tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  且它们的全体  $A_1$  线性无关.

由方程组(10)知  $\tilde{B}_{ij}$  均为  $B_{ij}$  的一些线性组合, 所以显然  $\tilde{B}_{ij} \in \tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ . 又  $\tilde{B}_{ij}$  都满足与周期性边界条件等价的如下方程:

$$\lambda \tilde{B}_{ij} = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

故  $\tilde{B}_{ij} \in \tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ . 为证  $A_1 = \{\tilde{B}_{ij}\}$  线性无关, 令

$$\sum'_{(i,j)} a_{ij} \tilde{B}_{ij}(x, y) \equiv 0$$

这里, 记号  $\sum'_{(i,j)}$  表示对所有属于  $A_1$  的  $\tilde{B}_{ij}$  的下标求和. 将  $\tilde{B}_{ij}$  的表示式(10)代入上式, 然后展开并

按  $B_{ij}$  合并, 变为

$$\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} b_{ij} B_{ij}(x, y) \equiv 0 \quad b_{00} = 0$$

由  $\tilde{B}_{ij}$  的构造(10)式不难看出, 对于每个与  $\tilde{B}_{ij}$  相应的下标  $(i, j)$  都有  $a_{ij} = b_{ij}$ , 而由引理 1 知  $\{B_{ij}; (i, j) \in \Lambda \setminus \{0, 0\}\}$  构成  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基底, 故所有系数  $b_{ij}$  全为零, 从而所有的  $a_{ij}$  为零. 即  $A_1 = \{\tilde{B}_{ij}\}$  线性无关.

### 参考文献

- 1 Morsche H G. Periodic bivariate cubic splines on type-1 triangulation, in: approximation theory, 1986, 487~490.
- 2 沙震, 宣培才. I 型三角剖分上三次双周期样条的插值与逼近. 计算数学, 1988, 10 (3): 253~256.
- 3 刘焕文. 双周期样条函数空间  $\tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ . 湘潭大学学报, 1990, 12 (1): 19~26.
- 4 刘焕文. 双周期样条函数空间  $\tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  的代数结构. 高等学校计算数学学报, 1990, 12 (4): 335~341.
- 5 刘焕文. 双周期二次样条的插值逼近. 计算数学, 1992, 14 (2): 152~156.
- 6 刘焕文. 四方向网上二次双周期样条的点插值逼近. 高等学校计算数学学报, 1993, 15 (3): 195~206.
- 7 Liu Huanwen. The double periodic spline space  $\tilde{S}_2^1(\Delta_{mn}^{(1)})$  with degree  $k \geq 4$  on type-1 triangulation. CALCOLO, 1992, 29 (3~4): 269~289.
- 8 Wang R H. The dimension and basis of space of multivariate splines. J Comp Appl Math, 1985, 12: 163~177.

(责任编辑: 蒋汉明 邓大玉)

## 柳桂高速公路罗山石方光面爆破技术在路堑开挖工程中达到国际先进水平

柳桂高速公路的罗山石质路堑工程中应用了深孔爆破、光面爆破和石方机械化施工技术, 最大单钻孔深 28 m, 开挖边面 8 000 m<sup>2</sup>, 使该工程获得了稳定、平整、美观的高路堑边坡。

1994 年 12 月, 广西壮族自治区科委邀请冯叔瑜院士等 11 名国内著名爆破专家对该项目进行鉴定, 鉴定意见为: 石方机械化施工达到国内公路、铁路石方机械化施工的领先水平; 光面爆破技术应用使坡面半孔率达 95% 左右, 在路堑开挖工程中达到了国际先进水平。

(李桂莲 肖军)