DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 1996，3（3）：12～15

市场扩散的数学模型及其机理分析
The Mathematical Models for Marketing Diffusion and Their Princeple Analysis

潘 涛
Pan Tao

（广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路10号 530004）
(Dept. of Math. and Info Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guagnxi, 530004)

摘要 介绍 Logistic，Bass，Steffens-Murthy 三个新产品市场扩散的数学模型，用数学分析的方法，比较了这些模型的差异性，主要优点以及适用范围，提出了一些市场扩散研究的动向和趋势.

关键词 市场 扩散 数学模型

Abstract Three mathematical models, Logistic, Bass, steffens-Murthy, for new product marketing diffusion were introduced, and their diffusion princeple were further studied using the method of mathematical analysis.

Key words marketing, diffusion, mathematical model

新产品或新技术被社会接受、采用的过程，即市场更新扩散过程，是市场研究的重要课题. 它对于市场预测以及企业制定价格、广告等方面的合理策略都具有重要作用. 自本世纪60年代起，国际上涌现了大量的定量分析市场扩散过程的文献. 本文简要介绍了其中三个比较成功的模型，然后利用建立的模型，采用数学分析的方法，对扩散机理作了进一步的研究，比较了这些模型的差异性、主要优点以及适用范围，并指出了一些发展方向和趋势. 这对于研究我国社会主义市场经济条件下的产品市场扩散过程，对于进行科学地预测、合理地决策都有重要意义.

1 Logistic 模型

设 K 为潜在的消费者总体数，$N(t)$ 为 t 时刻购买了新产品的人数，其中 $K \geqslant N(t)$. 假设：对于尚未购买该产品的消费者来说，只有当已经采用了该产品的消费者对他谈论了该产品之后，他才可能会购买它. 因此在某时间段购买该产品的人数与在此之前已购买该产品的人数 $N(t)$ 以及尚未购买该产品的人数 $K - N(t)$ 成正比，据此可有下列模型[1,2]：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = aN(t)(K - N(t)) \tag{1}$$

$$N(0) = N_0 > 0 \tag{2}$$

其中 $a > 0$，为扩散强度系数，可用最小二乘法进行估计，常微分方程初值问题(1)－(2)有解析解：

$$N(t) = K[1 + (\frac{K - N_0}{N_0})e^{-aKt}]^{-1} \tag{3}$$

为简明起见，本文只讨论耐用消费品的销售规律. 由于耐用消费品一般不会重复购买，购买者人数 $N(t)$ 可以看作是产品的累积销售量，产品的瞬时销售量 $P(t)$（即销售速度）应该等于导数 $N'(t)$，今后 $P(t)$ 简称销售量. 根据(1)，可求得：

$$P(t) = aN(t)(K - N(t)) > 0 \tag{4}$$

$$P'(t) = a^2N(t)(K - N(t))(K - 2N(t)) \tag{5}$$

$$P''(t) = a^3N(t)(K - N(t))(K - (3 + \sqrt{3})N(t))(K - (3 - \sqrt{3})N(t)) \tag{6}$$

因为 $N(t)$ 是时间 t 的严格单调递增函数，故可以选取唯一确定的 t_M, t_*, t^* 使得：

$$N(t_M) = K/2;\ N(t_*) = (3 - \sqrt{3})K/6;\ N(t^*) = (3 + \sqrt{3})K/6 \tag{7}$$

实际上，根据(3)和(7)：

$$t_M = \ln(\frac{K - N_0}{N_0})/(ak),$$

$$t_* = \ln((2 - \sqrt{3})\frac{K - N_0}{N_0})/(ak),$$

$$t^* = \ln((2 + \sqrt{3})\frac{K - N_0}{N_0})/(ak).$$

995-12-11 收稿。

根据(5),(6),易如:

$$P'(t_M)=0; t<t_M, P'(t)>0; t>t_M, P'(t)<0$$

故最大销售量为:

$$P_{\max}=P(t_M)=aK^2/4$$

并且:

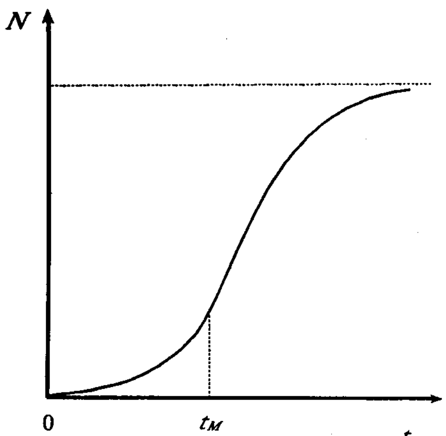
$$P''(t_*)=0;\ P''(t^*)=0$$

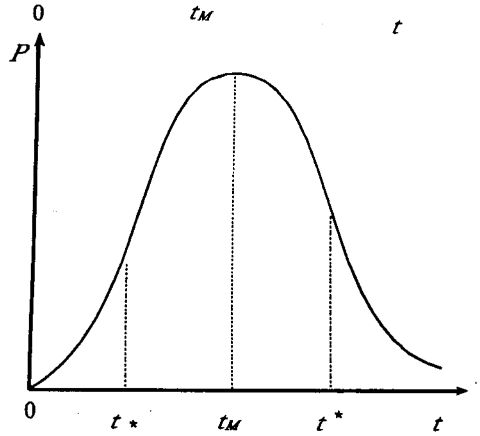
$$t<t_*,\ P''(t)>0;$$

$$t_*<t<t^*,\ P''(t)<0;$$

$$t>t^*,\ P''(t)>0$$

综上,可以画出累积销售量增长曲线(即 N-t 曲线)和瞬时销售量增长曲线(即 P-t 曲线)的大致形状:





可以看出:在时间 t_M 之前,销售量 $P(t)$ 单调递增;在时间 t_M 之后,销售量 $P(t)$ 单调递减;在时间段 $(0,t_*)$ 内,销售量 $P(t)$ 缓慢增加,但增长速度逐渐加快,这段时间称为成长期;在时间段 (t_*,t^*) 内,销售量 $P(t)$ 先增加后下降,但增长速度逐渐减慢,到最高点后缓慢下降,这段时间称为成熟期;在时间段 $(t^*,+\infty)$ 内,销售量 $P(t)$ 持续下降,而且下降的速度不断增大,这段时间称为衰退期. 一个产品由成长期到衰退期的全过程称为该产品的产品生命周期(简记为 PLC).

这些指标对于企业制定合理的生产和销售策略,无疑是很有帮助的. 比如在成长期应采取小批量生产;在成熟期应转入正式大批量生产;而在衰退期则应适当转产等等.

50 年代末美国 Carnegie-Mellon 大学的 Edwin Mansfield[1] 调查了 12 项新技术在 4 个主要行业中的推广情况,除一项结果以外,其他所有调查结果均较好地符合上述增长模式和指标. 这说明 Logistic 型市场扩散模式有一定的适用范围.

2 Bass 模型

仍设 K 为潜在的消费者总体数,$N(t)$ 为 t 时刻购买了新产品的人数,其中 $K\geqslant N(t)$. 假设:产品信息的扩散分两类,一类来自消费者内部(口传信息);一类来自消费者外部(广告、宣传、商店等). 消费者分两类,一类接收了外部信息就可能去买,称为“更新者”;另一类必须接收到内部信息才可能去买,称为“模仿者”. 据此可有下列模型[3]:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=(K-N(t))(a+b\,N(t)) \qquad (8)$$

$$N(0)=0 \qquad (9)$$

其中 $a,b>0$,分别为“更新者”、“模仿者”的扩散强度系数,可用最小二乘法进行估计. 常微分方程初值问题(8)-(9)有解析解:

$$N(t)=K(1-e^{-(a+bK)t})(1+K\frac{b}{a}e^{-(a+bK)t})^{-1} \qquad (10)$$

对于销售量 $P(t)$,根据(8),可求得:

$$P(t)=(K-N(t))(a+bN(t))>0 \qquad (11)$$

$$P'(t)=b(K-N(t))(a+bN(t))(K-2N(t)-a/b) \qquad (12)$$

$$P''(t)=b^2(K-N(t))(a+bN(t))(K-(3+\sqrt{3})N(t)-(2+\sqrt{3})a/b)\cdot(K-(3-\sqrt{3})N(t)-(2-\sqrt{3})a/b) \qquad (13)$$

因为 $N(t)$ 是时间 t 的严格单调递增函数,故可以选取唯一确定的 t_M,t_*,t^* 使得:

$$N(t_M)=K/2-a/(2b); \qquad (14)$$

$$N(t_*)=((3-\sqrt{3})K-(3+\sqrt{3})a/b)/6;$$
$$N(t^*)=((3+\sqrt{3})K-(3-\sqrt{3})a/b)/6 \qquad (15)$$

实际上,根据式(10)和(14),(15),可以得到:

$$t_M=\ln(\frac{bK}{a})/(a+bK),$$

$$t_*=\ln((2-\sqrt{3})\frac{bK}{a})/(a+bK),$$

$$t^*=\ln((2+\sqrt{3})\frac{bK}{a})/(a+bK).$$

根据(11)~(13),易如:

$$P'(t_M)=0; t<t_M, P'(t)>0; t>t_M, P'(t)<0$$

故最大销售量为：

$$P_{\max}=P(t_M)=(a+bk)^2/(4b) \tag{16}$$

并且：

$$P''(t_*)=0;\quad P''(t^*)=0$$

$$t<t_*,\quad P''(t)>0;$$

$$t_*<t<t^*,\quad P''(t)<0;$$

$$t>t^*,\quad P''(t)>0$$

由此可见，Bass 模型的累积销售量增长曲线（即 N-t 曲线）和瞬时销售量增长曲线（即 P-t 曲线）的大致形状与 Logistic 模型相似. 不同之处在于 Bass 模型考虑了广告等外部因素对产品扩散的影响，而且不难看出，加大广告等外部因素的力度，意味着 a 值增加，t_M,t_*,t^* 的值减小，即意味着加快高峰期的到来，这显然是符合实际情况的. 此外，Bass 模型的模型参数有 3 个（即 K,a,b），而 Logistic 模型的模型参数只有 2 个（即 K,a），因此 Bass 模型比 Logistic 模型更为灵活，适用范围也就更宽.

美国 50 ～ 70 年代黑白电视机，彩色电视机、洗碗机等耐用消费品的销售数据较好地符合上述 Bass 型增长模式和指标[3,4]. 这说明 Bass 模型也是一个比较成功的描述新产品市场扩散的模型

3 Steffens-Murthy 模型

仍设 K 为潜在的消费者总体数，$N(t)$ 为 t 时刻购买了新产品的人数，其中 $K\geqslant N(t)$. 假设[4]：产品扩散信息分两类，一类来自广告、宣传、商店、口传等，称为搜寻型信息；一类来自消费者购买使用后得到的对产品的认识，称为体验型信息. 消费者分两类，一类接收到搜寻型信息就会去买，称为“更新者”；另一类必须接收到体验型信息才会去买，称为“模仿者”. 记 K_1,K_2 分别为更新者、模仿者的总人数：

$$K_1=\delta_1 K, K_2=\delta_2 K \tag{17}$$

其中 δ_1,δ_2 为比例系数，$\delta_1+\delta_2\leqslant 1$.

首先建立搜寻型信息传播的模型. 假设无论更新者还是模仿者对搜寻型信息的传播速度是一样的，则：

$$A_1(t)=\delta_1 A(t) \tag{18}$$

其中 $A_1(t)$ 和 $A(t)$ 分别是在 t 时刻已得到搜寻型信息的更新者人数和总人数. 考虑搜寻型信息的传播仍有两个途径，来自消费者外部的广告、宣传、商店等传播及来自消费者内部的口头传播. 仿照 Bass 模型的作法，搜寻型信息的传播规律为：

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=(K-A(t))(a+bA(t)) \tag{19}$$

$$A(0)=0 \tag{20}$$

其中 $a,b>0$，分别为搜寻型信息在消费者外部、消费者内部的传播强度系数. 记 $N_1(t)$ 为 t 时刻购买了新产品的更新者人数，注意到这部分人只要接收到搜寻型信息后立即购买，那么有 $N_1(t)=A_1(t)$. 因此由 (18) ～ (20) 得：

$$\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t}=(K_1-N_1(t))(a_1+b_1N_1(t)) \tag{21}$$

$$N_1(0)=0 \tag{22}$$

系数 $a_1,b_1>0$，可用最小二乘法进行估计. 常微分方程初值问题(21) ～ (22) 与(8) ～ (9) 完全类似，相应的累积销售量增长曲线（即 N-t 曲线）和瞬时销售量增长曲线（即 P-t 曲线）也有类似的特点.

下面建立模仿者的方程. 设模仿者一旦得到体验型信息后决定购买，而人们在购买产品后需经过时间 T 才能得出对该产品的评价，并忽略可能持不满意见的人们. 记 $N_2(t)$ 为 t 时刻购买了新产品的模仿者人数，则有：

$$\frac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}=(K_2-N_2(t))(a_2N_1(t-T)+b_2N_2(t-T))\quad (t\geqslant T) \tag{23}$$

$$N_2(T)=0 \tag{24}$$

其中 $a_2,b_2>0$，分别为还未购买新产品的模仿者从已购了该新产品的更新者、模仿者那里得到体验型信息后导致购买的系数.

为简化起见，做下列假设：(1) 与产品信息传播的时间相比，人们在购买产品后对该产品的评价所需的时间可以忽略不计，即 $T=0$；(2) 在体验型信息的传播方面，更新者与模仿者的作用相同，即 $a_2=b_2=r$. 那么(23) ～ (24) 可写为：

$$\frac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}=(K_2-N_2(t))r(N_1(t)+N_2(t)) \tag{25}$$

$$N_2(0)=0 \tag{26}$$

常微分方程初值问题(21) ～ (22) 与(25) ～ (26) 一起描述了新产品市场扩散的过程[4]，不妨称为 Steffens-Murthy 模型（简称为 S-M 模型）. 由 S-M 模

型解出 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$，则 t 时刻新产品采用者总数为：

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \tag{27}$$

显然(21) ～ (22) 有解析解，如(10) 式的形状. 对于已经解出的 $N_1(t)$，令：

$$u(t) = [N_2(t) - K_2]^{-1} \tag{28}$$

由(25) 和(28) 可得：

$$\frac{du(t)}{dt} = r + g(t)u(t) \tag{29}$$

其中

$$g(t) = rK_2 + rN_1(t) \tag{30}$$

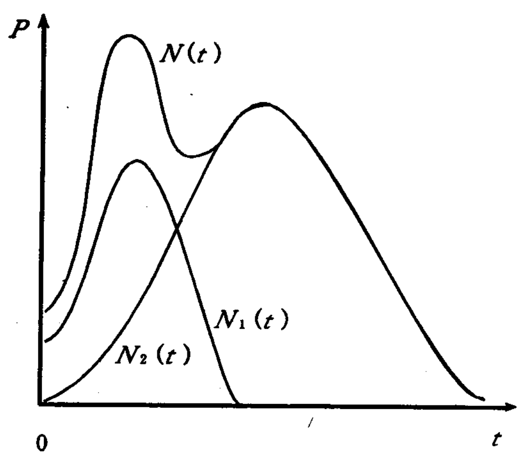
由(28) ～ (30) 可以求出 $N_2(t)$，不再赘述. 关于 $N_2(t)$、$P_2(t) = (N'_2(t))$ 的增长曲线，因为：

$$P_1(t) = N_1'(t) = (K_1 - N_1(t))(a_1 + b_1N_1(t)) > 0 \tag{31}$$

$$P_2(t) = (K_2 - N_2(t))r(N_1(t) + N_2(t)) > 0 \tag{32}$$

$$P'_2(t) = (K_2 - N_2(t))r(N'_1(t) + (K_2 - 2N_2(t) - N_1(t))(N_1(t) + N_2(t))) \tag{33}$$

注意到，$N_1(t)$、$N_2(t)$ 是时间 t 的严格单调递增函数，根据(31) ～ (33) 不难看出，$P_2(t)$ 的增长曲线必在某时间 t_* 以前严格单调递增，而必在某时间 t^* 以后严格单调递减；至于在时间段(t_*, t^*) 的情况还不能肯定，可能是单峰的也可能是多峰的，但即使是 $P_2(t)$ 为单峰的情形，与单峰的 $P_1(t)$ 叠加之后仍会出现双峰的情况，例如[4]：



采用S-M 模型，文献 [4] 对 Bass[3]的数据进行了计算，在双峰的案例，所得结果比Bass 模型更为准确. 更重要的是S-M 模型有进一步的理论意义，首先对于实际情况中出现的双峰 PLC 现象不能简单地归于随机干扰，而是给出了一个机理性的解释. 其次，在对耐用消费品做购买量预测时，由于传统理论是单峰的，对数据的下降有可能误认为产品进入衰退期. 有了 S-M 模型以后，对数据的下降必需谨慎分析有可能进入产品的衰退期，但也有可能是第二个销售高峰的序幕.

4 一些研究动向

近期的一些研究[5~7]探索了一条从个体购买行为分析建立扩散模型的途径，其基本思路是研究消费者在产品性能未得到确切认识的情况下的风险购买，总体的扩散水平及速度由微观个体的购买决策集结而成. 这条途径所建立的扩散模型经济意义清晰，适应能力也较强. 最近，文献 [8] 和 [9] 还将上述方法推广到有竞争环境的情形，和重复性消费品的情形，得到了竞争环境下的新产品市场扩散模型，以及重复性消费品市场扩散模型，并得出广告费用的最优控制策略（遗憾的是还未能进行具体计算，与实际数据对照）. 这些显然是重要的研究动向和发展趋势.

参考文献

1 Mansfield E. Technical Change and the Rate of Imitation, Econometrica, 1961, 29 (4).

2 Lucas W F. Differential Equation Models. New York: Springer-Verlag, 1983.

3 Bass F M. A new product growth model for consumer durables. Managenment Sci, 1969, 15 (1): 215～227.

4 Steffens P R, Murthy D P. A mathematical model for new product diffusion: the influence of innovators and imitators. Math Comput Modelling, 1992, 16 (4): 11～26.

5 Chatterjee R. The innovation diffusion process in a heterogeneous population: a micromodelling approach. Managenment Sci, 1990, 36 (9): 1057～1079.

6 Oren S S. Diffusion of new products in risk-sensitive markets. J Forecasting, 1988, 7 (4): 273～287.

7 Roberts J H. Modelling multiatiribute utility risk, and belief dynamics for new conumer durable brand choice. Managenment Sci, 1988, 34 (2): 167～185.

8 曾 勇等. 竞争环境下的新产品市场扩散模型. 电子科技大学学报, 1993, 22 (1): 98～103.

9 曾 勇等. 更新扩散模型与最优广告费用控制. 电子科技大学学报, 1993, 22 (4): 443～448.

（责任编辑：蒋汉明　邓大玉）