

混沌判据的数值计算

Numerical Calculation of the Criterion Function of Chaos

李群宏

Li Qunhong

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)

(Dept. of Math. & Info Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 利用数值积分法计算判别是否出现混沌的 Melnikov 函数, 从而简化了复杂公式的计算.

关键词 非线性受迫振动系统 混沌 Melnikov 函数 数值积分

Abstract The Melnikov function which can decide whether the chaos appears or not was computed by means of a numerical integration method, thus the calculation of the complicated formula was simplified.

Key words nonlinear forced oscillation, chaos, Melnikov function, numerical integration

中图法分类号 O175; O241.4

混沌是在确定的系统中出现的貌似不规则的运动, 确定的系统是指动力系统, 通常是用常微分方程, 偏微分方程, 迭代方程等来描述. 用 Melnikov 法^[1]来确定具有同宿或异宿轨线的二维非线性系统加周期扰动后其解是否具有混沌性是目前较有效的分析方法. 但是要计算 Melnikov 函数, 首先必须知道同宿或异宿轨线的解析式, 其次要经过大量复杂的运算推导, 用到特殊函数如 Jacobi 椭圆函数, Γ -函数等, 这就限制了 Melnikov 法在工程实际中的应用. 文献 [2] 运用数值近似法讨论了具有同宿轨线的一类电力系统中出现的混沌现象, 本文将数值方法应用到具有异宿轨线的一类二维非线性受迫振动系统上, 由所提出的算法得到了比较满意的结果.

1 求 Melnikov 函数的算法

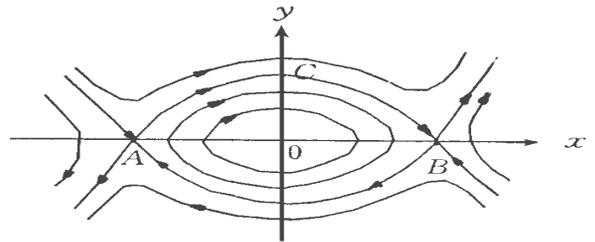
为简便起见, 具体考察下列系统^[3]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + p^2 x^2 - X[\lambda_2 y |y| - \lambda_1 y - \lambda_3 \sin kt] \end{cases} \quad (1)$$

当 $X = 0$ 时, 系统 (1) _{$X=0$} 有中心型奇点 $O(0, 0)$, 双曲鞍点 $A(-\frac{1}{p}, 0), B(\frac{1}{p}, 0)$, 并有初积分

$$H(x, y) = 2(x^2 + y^2) - p^2 x^4 = h \quad (2)$$

当 $0 < h < h_0 = \frac{1}{p^2}$ 时, (2) 包含围绕中心 $O(0, 0)$ 的一族闭分支; 当 $h = h_0 = \frac{1}{p^2}$ 时, (2) 是连接鞍点 A 与 B 并包围上述闭轨线族的异宿轨线 (图 1), 其中, 在上

图 1 (1) _{$X=0$} 的相图Fig. 1 Phase diagram of system (1) _{$X=0$}

半平面内的一支具有方程

$$\begin{cases} x_0(t) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{t}{2} \\ y_0(t) = -\frac{1}{2p} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \end{cases} \quad (3)$$

则分析混沌现象的 Melnikov 函数定义为

$$M(t_0, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) [\lambda_2 y_0(t) |y_0(t)| - \lambda_1 y_0(t) - \lambda_3 \sin k(t + t_0)] dt \quad (4)$$

倘若 $M(t_0, \lambda)$ 不依赖于 X 并且在参数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 所在的某区域 Ω 内, $M(t_0, \lambda)$ 在零附近振动,

当 $M(\tilde{t}_0, \lambda) = 0$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} M(t_0, \lambda) \Big|_{\tilde{t}_0} \neq 0 \quad (5)$$

则当 $0 < X \ll 1$ 时, (1) x 存在横截异宿点, 从而 (1) x 出现混沌.

下面讨论 $M(t_0, \lambda)$ 的数值计算方法.

首先分析异宿轨线 ACB 的性质. 在 $(-\infty, 0]$ 区

间内, 方程 (3) 表示异宿轨线的 CA 部分, 在 $[0, +\infty)$

区间内, 方程 (3) 表示异宿轨线的 CB 部分, 且 $x_0(t)$

是奇函数, $y_0(t)$ 是偶函数, 由式 (4), 得

$$M(t_0, \lambda) = -\frac{\lambda_2}{2p^3} F_1 - \frac{\lambda_1}{p^2} F_2 - \frac{2\lambda_3}{2p} F_3 \sin k t_0 \quad (6)$$

式中, $F_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^6 \frac{t}{2} dt$, $F_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^4 \frac{t}{2} dt$, $F_3 =$

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \cos k t dt, \text{ 记}$$

$$Ro(\lambda) = \frac{\lambda_2 F_1 - \overline{2p\lambda_1 F_2}}{2p^2 \lambda_3 F_3}$$

当 t 从 0 递增至无穷大时, 异宿轨线 ($x_0(t)$,

$y_0(t)$) 在经过一个有限长的时间 t_1 后, 便已经接近鞍

点 B , 而在 $[t_1, +\infty)$ 区间内, 异宿轨线只是由 B 附近

的点 $B_1(x_0(t_1), y_0(t_1))$ 运行到 B 点. 故对任意的 $X >$

0, 因为

$$\left| \int_{t_1}^\infty y_0(t) dt \right| = \int_{t_1}^\infty \frac{1}{2p} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} dt$$

$$= \int_{t_1}^\infty \frac{4}{2p(e^{t/2} + e^{-t/2})^2} dt$$

$$\leq \frac{4}{2p} \int_{t_1}^\infty \frac{1}{e^{t/2}} dt$$

$$= \frac{2}{pe^{t_1/2}} < X$$

所以, $t_1 > \frac{1}{2} \ln \frac{2}{pX}$ 从而得到下述定理

定理 对任意小的 $X > 0$, 只要经过足够长的时间 t_1

$> \frac{1}{2} \ln \frac{2}{pX}$, 则

$$\left| \int_0^\infty y_0(t) dt - \int_0^{t_1} y_0(t) dt \right| < X$$

根据上述误差分析, 提出计算 Melnikov 函数的算法如下:

(1) 根据所需要的精度 X , 算出时间 t_1 ;

(2) 确定 t_1 后, 利用数值积分, 如 Runge-Kutta 法, 计算

$$\overline{F_1} = \int_0^{t_1} \operatorname{sech}^6 \frac{t}{2} dt,$$

$$\overline{F_2} = \int_0^{t_1} \operatorname{sech}^4 \frac{t}{2} dt,$$

$$\overline{F_3} = \int_0^{t_1} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \cos k t dt$$

(3) 由第二步的结果, 就可以求得系统 (1) x 出现混沌的近似判别式

$$\overline{Ro}(\lambda) = \frac{\lambda_2 \overline{F_1} - \overline{2p\lambda_1 F_2}}{2p^2 \lambda_3 \overline{F_3}} \quad (7)$$

算例

文献 [3] 给出了系统 (1) x 的 Melnikov 函数表达式

$$M(t_0, \lambda) = \frac{\delta_2}{15p^3} - \frac{2}{3p^2} \overline{2\lambda_1} - \frac{\overline{2}^c k \lambda_3}{p \operatorname{sh} \frac{k c}{2}} \sin k t_0$$

故有

$$Ro(\lambda) = \frac{(\delta_2 - 10 \overline{2p\lambda_1}) \operatorname{sh} \frac{k c}{2}}{15 \overline{2p^2 k \lambda_3}} \quad (9)$$

于是, 只要 $|Ro(\lambda)| \leq 1$, 则 (1) x 的解必混沌.

取一组参数 $p = 0.8, k = \frac{1}{2}, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 =$

$0.05, \lambda_3 = 0.2$, 由式 (9) 得 $Ro(\lambda) = 0.2746173$. 另由

第二节的算法, 得到下述计算结果

表 1 $\overline{Ro}(\lambda)$ 的数值计算结果

Table 1 $\overline{Ro}(\lambda)$ values of numerical calculation

ϵ	t_1	$\overline{F_1}$	$\overline{F_2}$	$\overline{F_3}$	$\overline{Ro}(\lambda)$
10^{-3}	5.5334360	0.7542472	0.9428081	0.3852556	0.2742265
10^{-5}	8.7897831	0.7542472	0.9428090	0.3847008	0.2746218
10^{-6}	10.4179566	0.7542472	0.9428090	0.3847080	0.2746167
10^{-7}	12.0461301	0.7542472	0.9428090	0.3847071	0.2746173

由此可见, 当 X 取得足够小时, 即 $X < 10^{-7}$, 则

$\overline{Ro}(\lambda)$ 的值与 $Ro(\lambda)$ 的值吻合得相当好, 这说明本文

算法的精度是比较高的, 完全可用于分析具体的非线性

系统中的混沌现象.

参考文献

- Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag, 1983.
- 袁 斌, 孙启宏. 应用混沌理论分析电力系统中的混沌现象. 数学的实践与认识, 1995, (2): 1~6.
- 李继彬, 刘尊荣. 几类非线性受迫振动系统的混沌性质. 数学物理学报, 1985, 5 (2): 195~204.

(责任编辑: 莫鼎新 邓大玉)