

# 随机分叉定义小议\*

## Definitions of Random Bifurcation

戎海武 徐伟 方同  
Rong Haiwu Xu Wei Fang Tong

(西北工业大学 西安市友谊西路 127号 710072)

(Northwestern Polytechnical University, 127 West Youyi Road, Xi'an, Shaanxi, 710072)

摘要 用几个具体的实例表明用不同的随机分叉的定义得到的分叉点是不同的。

关键词 随机分叉 特征指数 分叉点

**Abstract** Two different definitions of the random bifurcation were discussed in detail. Some examples showed that different definitions induced different bifurcation points.

**Key words** random bifurcation, characteristic exponent, bifurcation point

中图法分类号 O211.5; O414.2

考虑由如下常微分方程描述的确定性动力学系统

$$\dot{x} = f(x, T), x(0) = x_0 \in R^n \quad (1)$$

式中  $T$  为参数. 对给定的  $T$ , 设  $x_s(t, T)$  为系统 (1) 的稳态解, 如果  $x_s(t, T)$  当  $T$  在  $T = T_c$  附近的定性性质发生变化, 例如当  $T < T_c$  时,  $x_s(t, T)$  稳定, 当  $T > T_c$  时,  $x_s(t, T)$  不稳定, 则称  $T_c$  为系统 (1) 的分叉点. 至于  $x_s(t, T)$  的稳定性, 通常是将方程 (1) 在  $x_s(t, T)$  处线性化, 再根据线性化后方程的零解的稳定性来确定.

由于实际系统中不可避免地受到随机因素的干扰, 考虑受随机扰动后系统 (1) 变为

$$\dot{x} = f(x, T, e^a(t)), x(0) = x_0 \in R^n \quad (2)$$

式中  $e^a(t)$  为一随机过程,  $e$  为其强度. (2) 式中的平稳解  $x_s(t)$  相当于 (1) 式中的稳态解. 同样地要问什么是随机系统 (2) 的分叉点? 同确定性系统 (1) 的分析类似, 首先将系统 (2) 在平稳解  $x_s$  处线性化, 得线性化后的方程为

$$\dot{v} = A(x_s(t), e^a(t))v, v(0) = v_0 \in R^n \quad (3)$$

式中  $A(x, e^a)$  是  $n \times n$  雅可比矩阵  $(\partial f_i / \partial x_j)$ .

方程 (3) 零解的稳定性可由其 Lyapunov 指数来

确定

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|v(t, v_0)\|$$

根据 Oseledec 乘法遍历性定理<sup>[1]</sup>, 系统 (3) 的 Lyapunov 指数有  $n$  个实数, 当且仅当其最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max} < 0$  时, 系统 (3) 的零解是几乎必然稳定的, 这样根据最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max} = 0$  确定出来的点  $T = T_c$  称为系统 (2) 的随机分叉点. 这种确定随机分叉的准则与确定性系统中是一致的, 并已应用于随机动力学系统的研究中, 如 Arnold<sup>[2]</sup> 等. 但也有许多研究者, 例如 Horsthemke 和 Lefever<sup>[3]</sup> 等, 是从系统响应的稳态概率密度的角度来给出系统 (2) 随机分叉点的定义, 即如果稳态概率密度的几何形状在  $T = T_c$  附近发生本质的变化, 例如当  $T < T_c$  时为半峰函数, 当  $T > T_c$  时为单峰函数, 则  $T_c$  称为随机分叉点.

上述两种不同的分叉准则可能给出不同的分叉点, Ariaratnam<sup>[4]</sup> 首先注意到这个问题, 他举了一个例子, 说明由两种分叉准则给出的分叉点是不同的.

本文则根据一些实例来解析上述两种不同观点.

### 1 一些例子

例 1 考虑如下的随机系统

$$\ddot{x} + x^2 \left( U + \frac{4T}{x^2 + x^2} \right) \dot{x} + x = e^a(t)x \quad (4)$$

式中  $T, U, e$  为参数,  $e^a(t)$  为单位强度的高斯白噪声. 由 Lin 和 Cai<sup>[5]</sup>, 当  $e = 0$ , 即无随机扰动时, 如果  $T <$

0, 系统 (4) 有一稳定的极限环; 如果  $T > 0$ , 系统 (4) 的稳态解为零解  $x = \dot{x} = 0$ . 当  $\epsilon > 0$  即存在随机扰动时, 响应的稳态概率密度为

$$p(x, \dot{x}) = c(x^2 + \dot{x}^2)^{-4\Gamma/\epsilon^2} \exp[-\frac{U}{\epsilon^2}(x^2 + \dot{x}^2)] \quad (5)$$

式中  $c$  为归一化常数.

设  $T, U, \epsilon$  均为小参数, 令  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ , 方程 (4) 可写为如下 Stratonovich 意义下的随机微分方程

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = -[x_1^2(U + \frac{4\Gamma}{x_1^2 + x_2^2})x_2 + x_1]dt + \epsilon x_1 d w \end{cases} \quad (6)$$

式中  $w(t)$  为标准 Wiener 过程,  $d w$  表示随机过程  $w(t)$  的增量 (Stratonovich 积分意义下). 作极坐标变换

$$x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$$

可将方程 (6) 化为

$$\begin{cases} dr = -\frac{1}{4}(4\Gamma + U r^2) r \sin^2 \theta dt + \frac{1}{2} \epsilon r \sin \theta d w \\ d\theta = -[1 + (4\Gamma + U r^2) \sin \theta \cos^3 \theta] dt - \epsilon^2 \cos^2 \theta d w \end{cases} \quad (7)$$

由于  $T, U, \epsilon$  均为小参数,  $r, \theta$  可近似看成为 Markov 过程, 通过随机平均<sup>[6]</sup>, 支配  $r, \theta$  的 Ito 随机微分方程为

$$dr = \frac{1}{2}(-T + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{U}{4}r^2)rdt + \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon r dw_1 \quad (8)$$

$$d\theta = -dt + \frac{\sqrt{6}}{4}\epsilon dw_2 \quad (9)$$

式中  $w_1(t), w_2(t)$  为相互独立的标准 Wiener 过程,  $d w$  表示随机过程  $w(t)$  的增量 (Ito 积分意义下). 设  $r_s(t), \theta_s(t)$  分别表示方程 (8), (9) 的平稳解, 令

$$r = r_s + v, v = e^d \quad (10)$$

将方程 (8) 在  $r_s$  处线性化后可得

$$dv = \frac{1}{2}(-T + \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3}{4}U r_s^2)dt + \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon dv_1 \quad (11)$$

由上式可知幅值过程  $r_s(t)$  的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \frac{1}{2}(-T + \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3}{4}U r_s^2) \quad (12)$$

当  $r_s = 0$  时, 可得零解的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda_0 = -\frac{T}{2} + \frac{1}{8}\epsilon^2 \quad (13)$$

为求出非零解的最大 Lyapunov 指数, 当  $r_s(t) \neq 0$  时, 由 (8) 式可得

$$d \ln r_s = \frac{1}{2}(-T + \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{U}{4}r_s^2)dt + \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon dv_1 \quad (14)$$

(14) 式两边取数学期望, 并注意到对平稳过程  $r_s(t)$ ,

有  $\frac{dE \ln r_s}{dt} = 0$ , 故有

$$E r_s^2 = \frac{1}{U}(-4T + \epsilon^2) \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (12) 式可得非零解的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = T - \frac{1}{4}\epsilon^2 \quad (16)$$

由 (8) 式可得平稳过程  $r_s(t)$  的稳态概率密度为

$$p(r) = c r^V \exp(-\frac{U}{\epsilon^2}r^2), V = 1 - \frac{8\Gamma}{\epsilon^2} \quad (17)$$

式中  $c$  为归一化常数.

(17) 式与方程 (4) 的精确稳态概率密度表达式 (5) 是一致的, 即通过极坐标变换由 (5) 式可得 (17) 式. 从而表明随机平均法给出了精确的幅值过程的稳态概率密度.

下面根据前述的两种不同的分叉准则来讨论系统 (4) 的随机分叉. 如果将  $T$  做为分叉参数, 根据零解和非零解的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_0, \lambda_1$  的表达式 (13), (16) 可知,  $T = T_c = \frac{\epsilon^2}{4}$  为系统的分叉点. 当  $T < T_c$  时,  $\lambda_0 > 0, \lambda_1 < 0$ , 即系统 (4) 的零解不稳定, 非零解稳定; 当  $T > T_c$  时,  $\lambda_0 < 0, \lambda_1 > 0$ , 即系统 (4) 的零解稳定, 非零解不稳定.

如果根据系统响应的稳态概率密度的形状来看, 由 (17) 式可知, 当  $U > 0$  时, (17) 式中的常数  $c$  可归一化, 即存在稳态概率密度的充分必要条件是

$$T < \frac{\epsilon^2}{4} = T^{(1)}$$

当  $T \geq \frac{\epsilon^2}{4}$  时,  $p(r)$  退化为 delta 函数  $W(r)$ , 从而  $T^{(1)}$  是系统 (4) 的分叉点. 当  $\frac{\epsilon^2}{8} < T < \frac{\epsilon^2}{4}$  时,  $p(r)$  为半峰函数, 当  $T < \frac{\epsilon^2}{8}$  时,  $p(r)$  为单峰函数, 故  $T = \frac{\epsilon^2}{8} = T^{(2)}$  也为系统 (4) 的分叉点.  $p(r)$  的图形见图 1, 稳态响应分叉图见图 2.

从物理上讲,  $T$  为系统的阻尼项, 当  $T > \frac{\epsilon^2}{4}$  时, 系统的阻尼足够大, 对任意初值, 系统的响应都将趋于零, 即系统的稳态概率密度为 delta 函数  $W(r)$ , 这时根据最大 Lyapunov 指数和稳态概率密度得出的分叉点  $T_c, T^{(1)}$  是一致的. 当  $T < \frac{\epsilon^2}{4}$  时, 系统的阻尼不够大, 此时系统有非零的稳态响应, 稳态概率密度存在, 但对不同强度的随机扰动, 系统响应的强度可能不同, 且其稳态概率密度的形状也可能发生本质性的变化, 例如从半峰变为单峰, 据此可得系统的第二个分叉点  $T^{(2)}$ , 此分叉点不可能由最大 Lyapunov 指数为零得到.

如果将  $U$  作为分叉参数, 由 (17) 式可知, 当  $U < 0$  时,  $p(r)$  不存在, 当  $U > 0$  时才存在, 故  $U = U = 0$  为分叉点. 当  $U < 0$  时, 由 (15) 式可知, 如果有非零稳态解存在, 则必有  $T > \frac{e_2^2}{4}$ , 由 (16) 式可知此非零解是不稳定的; 而当  $T < \frac{e_2^2}{4}$  时, 由 (15) 式可知系统 (4) 不存在非零稳态解, 而由 (13) 可知此时零解不稳定, 综上所述, 当  $U < 0$  时, 系统的响应将趋于无穷, 实际上此时系统 (4) 为一自激系统. 而当  $U > 0$  时, 系统的稳态解可能是稳定的 (这在上面已讨论过), 故  $U = 0$  也为系统的稳定性分叉, 即根据两种准则得到的分叉点是一致的.

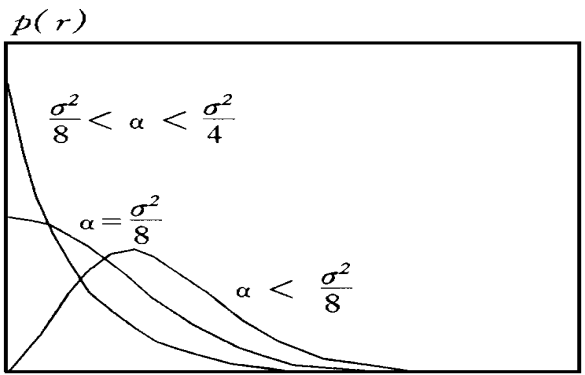


图 1 稳态概率密度

Fig. 1 Steady probability density

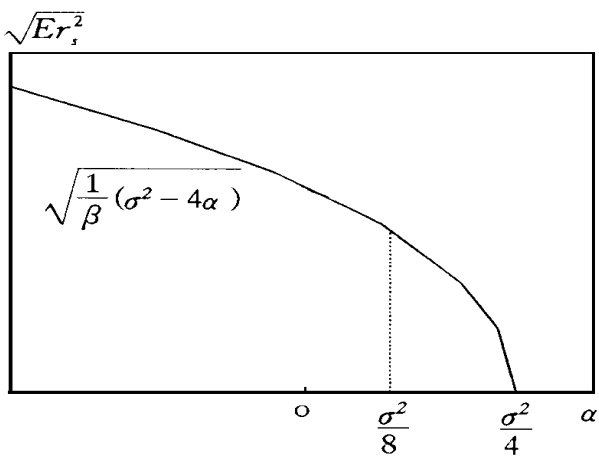


图 2 稳态响应分叉图

Fig. 2 Bifurcation of steady response

例 2 考虑如下同时受随机外激和参激的系统

$$\ddot{x} + [a + b(x^2 + \dot{x}^2)^d] \dot{x} + x = e_1 \overline{x^2 + \dot{x}^2} a_1(t) + e_2 a_2(t) \quad (18)$$

式中  $a_1(t), a_2(t)$  为相互独立的单位强度的高斯白噪声, 由文献 [7] 可知, 系统 (18) 响应的稳态概率密度为

$$p(x, \dot{x}) = \frac{c}{e_1^2(x^2 + \dot{x}^2) + e_2^2} \exp \left\{ - \int_0^{x^2 + \dot{x}^2} \frac{a + b u^d}{e_1^2 u + e_2^2} du \right\} \quad (19)$$

设  $a, b, e_1, e_2$  均为小参数, 同例 1 的作法, 经随机平均后, 可得关于幅值  $r(t)$  的 Itô 方程为

$$dr = \left[ - \frac{1}{2} (a + br^{2d}) r + \frac{1}{2} e_1^2 r + \frac{e_2^2}{4r} \right] dt + \frac{e_1}{2} e_1 r dw_1(t) + \frac{e_2}{2} e_2 dw_2(t) \quad (20)$$

式中  $w_1(t), w_2(t)$  为相互独立的标准 Wiener 过程, 由 (20) 可知  $r(t)$  的稳态概率密度为

$$p(r) = \frac{cr}{e_1^2 r^2 + e_2^2} \exp \left\{ - \int_0^{r^2} \frac{a + bu^d}{e_1^2 u + e_2^2} du \right\} \quad (21)$$

上式与 (19) 式是一致的.

先考虑没有外激, 即  $e_2 = 0$  的情形, 此时 (20) 变为

$$dr = \left[ - \frac{1}{2} (a + br^{2d}) r + \frac{1}{2} e_1^2 r \right] dt + \frac{e_1}{2} e_1 r dw_1 \quad (22)$$

同例 1 的解法, 可得系统 (22) 的零解和非零解的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_0, \lambda_1$  分别为

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{e_1^2}{4} - \frac{a}{2} \\ \lambda_1 = -d \left( \frac{e_1^2}{2} - a \right), Er^{2d} = \frac{1}{b} \left( \frac{e_1^2}{2} - a \right) \end{cases} \quad (23)$$

由 (23) 式可知,  $a = a_c = \frac{e_1^2}{2}$  为系统的分叉点. 当  $d > 0$  时, 如果  $a < a_c$ , 则  $\lambda_0 > 0, \lambda_1 < 0$ , 即零解不稳定, 非零解稳定; 如果  $a > a_c$ , 则  $\lambda_0 < 0, \lambda_1 > 0$ , 即零解稳定, 非零解不稳定. 当  $d < 0$  时, 如果  $a < a_c$ , 则  $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0$ , 即零解和非零解同时不稳定; 如果  $a > a_c$ , 则  $\lambda_0 < 0, \lambda_1 < 0$ , 即零解和非零解同时稳定. 如果将  $d$  作为分叉参数, 则  $d = d_c = 0$  应为系统的分叉点.

当  $e_2 = 0$  时, 由 (21) 式可知, 如果将  $T$  作为分叉参数, 则  $T_c^{(1)} = e_1^2, T_c^{(2)} = \frac{e_1^2}{2}$  为系统的两个分叉点, 设  $b > 0, d > 0$ , 当  $T \geq T_c^{(1)}$  时, 稳态概率密度  $p(r)$  为  $W(r)$ ; 当  $T_c^{(2)} < T < T_c^{(1)}$  时,  $p(r)$  为半峰函数; 当  $T < T_c^{(2)}$  时,  $p(r)$  为单峰函数. 如果将  $d$  作为分叉参数, 则  $d = d_c = 0$  为分叉点, 当  $d < d_c$  时,  $p(r)$  不存在; 当  $d > d_c$  时,  $p(r)$  才可能存在. 如果将  $b$  作为分叉参数, 则  $b = b_c = 0$  为分叉点, 当  $b < b_c$  时,  $p(r)$  不存在; 当  $b > b_c$  时,  $p(r)$  才可能存在.

下面讨论  $e_2 \neq 0$ , 即有外激的情形.

若  $r > 0, d < 0$ , 则  $p(r)$  不存在.

当  $d < 0$  或  $b = 0$  时, 若  $a > \frac{c_1^2}{2}$ ,  $p(r)$  为  $W(r)$ ; 若

$a < \frac{c_1^2}{2}$ , 则  $p(r)$  不存在, 此时即使有非线性阻尼 ( $b \neq 0$ ), 仍不足以限制由于随机参激引起的幅值增长. 在物理上, 这表明由于随机参激输入系统的能量总是大于系统消耗的能量, 从而使系统的状态趋向于无穷.

从例 2 可见, 影响系统最大 Lyapunov 指数的参数有  $a, c_1, d$ , 而影响稳态概率密度的参数有  $a, b, d, c_1, c_2$ , 即系统中的几乎所有参数都会影响稳态概率密度, 根据最大 Lyapunov 指数和稳态概率密度这两种准则得到的分叉点不可能完全一致. 下面举一个一般性的例子说明这一问题.

例 3 考虑如下同时受随机外激和参激的系统

$$\ddot{x} + af(x^2 + \dot{x}^2)\dot{x} + x = c_1 \frac{c}{x^2 + \dot{x}^2} a_1(t) + c_2 a_2(t) \quad (24)$$

式中  $f(u)$  是具有二阶连续导数的函数,  $a_1(t), a_2(t)$  为相互独立的单位强度的高斯白噪声, 由文献 [8] 可知, 系统 (24) 响应的稳态概率密度为

$$p(x, \dot{x}) = \frac{c}{c_1^2(x^2 + \dot{x}^2) + c_2^2} \exp\left\{-\int_0^{x^2 + \dot{x}^2} \frac{af(u)}{c_1 u + c_2} du\right\} \quad (25)$$

设  $a, b, c_1, c_2$  均为小参数, 同例 1 的作法, 经随机平均后, 可得关于幅值  $r(t)$  的 Ito 方程为

$$dr = \left[-\frac{1}{2}af(r^2)r + \frac{1}{2}c_1 r + \frac{c_2}{4r}\right]dt + \frac{\sqrt{2}}{2}c_1 r dw_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 dw_2 \quad (26)$$

式中  $w_1(t), w_2(t)$  为相互独立的标准 Wiener 过程, 由 (26) 可得  $r(t)$  的稳态概率密度为

$$p(r) = \frac{cr}{c_1 r^2 + c_2^2} \exp\left\{-\int_0^{r^2} \frac{af(u)}{c_1 u + c_2} du\right\} \quad (27)$$

与 (25) 式是一致的.

由 (27) 可知,  $c$  可归一化即  $p(r)$  存在的充分必要条件是当  $r \rightarrow \infty$  时, 存在常数  $\Gamma > -1$ , 使得

$$\frac{af(r^2)r^\Gamma}{r^2} \rightarrow 0$$

由 (26) 可得系统 (24) 的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = -\frac{a}{2}\{Ef(r_s^2) + 2E[f'(r_s^2)r_s^2]\} + \frac{c_1}{4} \quad (28)$$

显然由 (28) 式令  $\lambda = 0$  得到的系统的分叉参数与根

据由 (27) 式定义的  $p(r)$  的形状变化而得到的分叉参数不可能是完全一致的.

实际上, 即使有相同的稳态概率密度, 系统的性质也可能是完全不同的. 下面的例子将说明这一点.

例 4 考虑如下 5 类系统

$$A: \ddot{x} + U\dot{x} + g(x) = c_1 a_1(t) \quad (29)$$

$$B: \ddot{x} + Ux^2\dot{x} + g(x) = c_1 x a_1(t) \quad (30)$$

$$C: \ddot{x} - \frac{c_1^2}{2}\dot{x} + Ux^3 + g(x) = c_1 \dot{x} a_1(t) \quad (31)$$

$$D: \ddot{x} + U(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}x^2)\dot{x} + g(x) = c_1 a_1(t) + c_2 x a_2(t) \quad (32)$$

$$E: \ddot{x} + (U - \frac{c_2^2}{2})\dot{x} + U(\frac{c_2^2}{c_1^2}x^2 + \frac{c_3^2}{c_1^2}\dot{x}^2)\dot{x} + g(x) = c_1 a_1(t) + c_2 x a_2(t) + c_3 \dot{x} a_3(t) \quad (33)$$

式中  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  为相互独立的单位强度的高斯白噪声, 虽然支配系统  $A \sim E$  稳态概率密度的 FPK 方程各不相同, 但由文献 [5] 可知, 上述系统具有相同的稳态概率密度

$$p(x, \dot{x}) = \text{cexp}\left\{-\frac{U}{c_1^2}[x^2 + \int_0^x g(u) du]\right\}$$

系统  $A \sim E$  称为等价随机系统, 但这些系统的本质显然是不同的. 系统  $A$  为随机外激系统,  $B, C$  为参激系统,  $D, E$  为同时具有外激和参激的系统.

下面我们分别研究这些系统的最大 Lyapunov 指数. 设  $U, c_1, c_2, c_3$  为小参数, 取  $g(x) = x$ , 容易求出系统  $A$  零解的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda_0 = -\frac{U}{2}$$

系统  $B$  为例 1 中系统 (4)  $\Gamma = 0$  时的特例, 由例 1 可知,  $B$  的零解和非零解的最大 Lyapunov 指数分别为

$$B: \lambda_0 = \frac{c_1}{8} > 0, \lambda_1 = -\frac{c_1}{4} < 0$$

由于  $U, c_1, c_2, c_3$  为小参数, 同例 1 的作法, 不考虑外激, 经过随机平均后可得  $r(t)$  的 Ito 方程为

$$C: dr = -\left(\frac{1}{8}c_1 r + \frac{3}{8}U r^3\right)dt + \frac{\sqrt{6}}{4}c_1 r dw_1$$

$$D: dr = -\frac{U}{2}\left(1 + \frac{c_2^2}{4c_1^2}r^2\right)rdt + \frac{\sqrt{2}}{4}c_2 r dw_1$$

$$E: dr = \left[-\frac{U}{2}r + \left(\frac{1}{8}c_2 + \frac{3}{8}c_3\right)r + U\left(\frac{c_2^2}{8c_1^2} + \frac{3c_3^2}{8c_1^2}r^3\right)\right]dt + \frac{\sqrt{2}}{4}c_2 r dw_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}c_3 r dw_2$$

从而可得系统  $C, D, E$  的最大 Lyapunov 指数分别为

$$C: \lambda_0 = \frac{c_1}{4} > 0, \lambda_1 = -\frac{c_1}{2} < 0$$

$$D \lambda_0 = -\frac{U}{2} + \frac{e_2^2}{8}, \quad \lambda_1 = U - \frac{e_2^2}{4}$$

$$E \lambda_0 = -\frac{U}{2} + \frac{e_2^2}{16} + \frac{3}{16}e_3^2,$$

$$\lambda_1 = U - \frac{e_2^2}{8} - \frac{3}{8}e_3^2$$

由系统  $A \sim E$  的最大 Lyapunov 指数的表达式可知, 当  $U > 0$  时, 系统  $A$  的零解稳定, 反之不稳定. 系统  $B, C$  的零解不稳定, 非零解稳定.  $U = \frac{e_2^2}{4}$  为系统  $D$  的分叉点,  $U = \frac{e_2^2}{8} + \frac{3}{8}e_3^2$  为系统  $E$  的分叉点.

## 2 小结

对确定性系统而言, 所谓分叉, 是指一个动态系统随着某个参数的变化, 其定性性质 (稳定性、拓扑结构) 发生变化. 所谓随机分叉, 则是指由参数的随机扰动引起的动态系统的定性性质的变化<sup>[9]</sup>.

由于描述随机系统的动态性质的量有很多, 例如最大 Lyapunov 指数、稳态概率密度、响应的矩等, 不妨将这些量称为特征量, 故根据不同特征量得出的随机分叉点可能是不同的. 这从上面的 4 个例子中可以看出, 由最大 Lyapunov 指数和稳态概率密度得到的分叉点不是完全一致的. 注意到, 根据响应的各个不同阶矩的稳定性所得到的系统的稳定性边界不尽相同; 所以, 不同的随机分叉定义导致不尽一致的结果

是不足为奇的.

## 参考文献

- 1 Oseledec V L, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19: 197~ 231.
- 2 Arnold L, Lyapunov exponents of nonlinear stochastic systems, Proc. IUTAM. Symp. on Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems, Innsbruck, Austria, 1987, Fzægler, Schuller G I, Eds. Springer-Verlag, Berlin, 1988, 181~ 201.
- 3 Hörsthemke W, Lefever R, Noise-Induced Transitions, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- 4 Anaratnam S T, Stochastic bifurcation: an illustrative example, ICNM II, Beijing, 1993, 445~ 462.
- 5 Lin Y K, Cai G Q, Stochastic Stability of Nonlinear Systems, Int. J Nonlinear Mech, 1994, 29 (4): 539~ 553.
- 6 Stratonovich R L, Topics in the theory of random noise I, Gordon and Breach, New York, 1963, (English Translation).
- 7 朱位秋. 几类非线性系统平稳随机响应的概率密度. 力学学报, 1991, (23): 92~ 102.
- 8 Soong T T, Random Differential Equations in Science and Engineering. NY: Academic Press, 1973.
- 9 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992.

(责任编辑: 莫鼎新 邓大玉)

## 广西科技工作“九五”势头好

“九五”期初, 广西科技工作呈现了各级第一把手抓科技、科技投入增加、科技与经济紧密结合的前所未有的好形势。

继自治区成立了以成克杰主席为组长的科技领导小组之后, 全区已有 11 个地、市, 61 个县 (市) 成立了科技领导小组. 自治区还建立了以区科委为组长单位, 区党委宣传部、区科协为副组长单位, 区财政厅等 13 个厅局为成员单位的自治区科普工作联席会议制度. 在南宁推出了每月一次的“科技集市”. 全区科普工作初步形成了“高科技、高起点、新思路、新形式、实用、实效”的工作思路. 全区科技投入占财政支出在 1995 年 1.39% 的基础上, 1996 年又有新的增加; 自治区本级科技三项经费比 1995 年增长了 14%, 并拨出 500 万元建立了主席科技基金; 桂林、北海、南宁三市的科技三项经费预算均比 1995 年增加了一倍多; 地处贫困地区的南丹县科技三项经费由去的 110 万元增加到 400 万元; 全区 15 个地、市, 81 个县 (市) 建立了科技发展基金, 总金额达 3700 多万元.

(贺根生)