DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4(2): 85~86

关于第二类 Feigenbaum函数方程两类解的构造*

Construction of Two Classes of Solutions for the Second Kind of Feigenbaum's Functional Equation

孙太洋
Sun Taixiang

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 构造了第二类 Feigenbaum函数方程的两类连续解.

关键词 第二类 Feigenbaum函数方程 连续解 最小值

Abstract Two classes of continuous solutions of the second kind of Feigenbaum's functional equation were constructed.

Key words second kind Feigenbaum functional equation, continuous solution, minimum
中图法分类号 O174

1 引言

在文献[1]中,杨路等提出了第二类 Feigenbaum函数方程

$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{\lambda}F^2(\lambda x),(0<\lambda<1,\text{待定}) \\ F(0)=1,\ 0\leqslant F(x)\leqslant 1,(x\in[0,1] \end{cases}$$

并给出了构造其单谷连续解的一个可方法，在文献[2]中，廖公夫从满足一定条件的单谷映射 (f: $[\lambda,1]\to[0,1]$) 出发构造了方程(1)的另一类连续解，由文献[1,2]所构造的连续解 F的一个共同之处是: $F|_{[\lambda,1]}$都是单谷的，然而方程(1)是否还有其它的解呢? 本文将构造方程(1)的另两类连续解 F，使得 $F|_{[\lambda,1]}$不是单谷的．首先，我们给出方程(1)的连续解的几个性质．

命题 1 设 F是方程(1)的连续解，α是 F的最小值点，那么 $F(T)=0$且 $\alpha>\lambda$.

证明 因为 α是 F的最小值点，所以，由方程(1)知 $\lambda F(T)=F^2(\lambda T)\geqslant F(T)$
因 $0<\lambda<1$且 $F(\alpha)\geqslant 0$，所以 $F(\alpha)=0$.

下证 $\alpha>\lambda$，用反证法，若 $\alpha\leqslant\lambda$，则 $\frac{\alpha}{\lambda}\leqslant 1$，从而推出

$$F\left(\frac{T}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}F^2(T)=\frac{1}{\lambda}F(0)=\frac{1}{\lambda}>1$$

这是不可能的，所以 $\alpha>\lambda$. 证毕.

命题 2 设 F是方程(1)的连续解，α是 F的唯一的最小值点，那么

(1) $F(1)=\lambda$且 $F^2(\lambda)=\lambda^2$;

(2) $F([0,\lambda T])=[T,1]$, $F([T,1])\subset[0,\lambda]$, $F(\lambda T)=T$;

(3) $F(\lambda)\neq\lambda$且 $F(\lambda)>\lambda$.

证明 结论(1)直接由方程(1)可得.

(2) 因为 $F^2(\lambda T)=\lambda F(T)=0$，由 F有唯一的最小值点，所以 $F(\lambda T)=T$. 反之，若 $x\in[0,\lambda]$使 $F(x)=T$. 则 $F\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}F^2(x)=\frac{1}{\lambda}F(T)=0$，所以 $\frac{x}{\lambda}=\alpha$，即 $x=\lambda\alpha$，由 F的连续性知: $F([0,\lambda T])=[T,1]$，$F(\lambda T)=T$.

设 F在 $[\alpha,1]$上的最大值点是 c. 则在 $[0,\lambda\alpha]$上必存在 x_1使 $F(x_1)=C$，从而 $F(C)=F^2(x_1)=\lambda F\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)\leqslant\lambda$所以 $F([T,1])=[0,\lambda]$.

(3) 假如 $F(\lambda)=T$，则 $\lambda^2=\lambda F(1)=F^2(\lambda)=F(T)=0$，这与已知矛盾，所以 $F(\lambda)\neq T$.

由于对任 $x\in[\lambda T,\lambda]$，$\frac{X}{\lambda}\in[T,1]$所以，$F^2(x)=\lambda F\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leqslant\lambda^2$，由(2)知 $F(x)>\lambda T$，从而 $F(\lambda)>\lambda T$. 假如存在某点 $x_1\in[\lambda\alpha,\lambda]$使 $F(x_1)=\lambda$，则

$$F(\lambda)=F^2(x_1)=\lambda F\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)\leqslant\lambda^2<\lambda T<F(\lambda)$$

1996-09-16收稿。
*广西自然科学基金项目 (桂科自 9611003).

这是不可能的，所以，对一切 $x\in[\lambda T,\lambda]$, $F(x)>\lambda$，即 $F(\lambda)>\lambda$．证毕

2 第二类 Feigenbaum函数方程两类解的构造

定理 1 设 $f:[\lambda,1]\to[0,1](0<\lambda<1)$ 是个连续函数且满足条件:

(1) $f(1)=\lambda, f^2(\lambda), f^2(\lambda)=\lambda^2$;

(2) 存在 $T\in[\lambda,1]$，使 $f(T)=0$ 且 $f(\lambda)>T$, $f([\lambda,T])=(0,f(\lambda)]$;

(3) 存在 $T_1,T_2,\in[T,1]T_1<T_2$，使 $f|_{[T,T_1]}$ 及 $f|_{[T_2,1]}$ 严格递增，$f|_{[T_1,T_2]}$ 严格递减，$f(T_1)=\lambda f(\lambda)$, $f(T_2)=\lambda T, f(\lambda)\leqslant T_1$;

(4) $f(x)=\lambda x$ 在 $[\alpha,1]$ 中只有唯一解 $x=1$.

那么，方程 (1) 存在连续解 F 满足 $f|_{[\lambda,1]}=f$.

证明 令 $p=f|_{[T_1,T_2]}, q=f|_{[T_1,T_2]}, h=f|_{[T_2,1]}$, $I_n=[\lambda^{n+1},\lambda^n], n=0,1,2,\cdots$，当 $x\in I_0$ 时，$f_0(x)=f(x)$.

(i) 当 $x\in I_1$ 时，$\frac{x}{\lambda}\in I_0, \lambda f_0(\frac{x}{\lambda})\in[0,\lambda f(\lambda)]$，令 $f_1(x)=p^{-1}\circ(\lambda f_0(\frac{x}{\lambda}))$

这时 $f_1(\lambda)=p^{-1}\circ(\lambda f_0(1))=p^{-1}(\lambda^2)=f(\lambda)=f_0(\lambda), f_1(\lambda^2)=p^{-1}\circ(\lambda f_0(\lambda))=T_1, f_1(I_1)=[T,T_1]$.

(ii) 当 $x\in[\lambda^2T,\lambda^2]$ 时，$\frac{x}{\lambda}\in[\lambda T,\lambda], \lambda f_1(\frac{x}{\lambda})\in[\lambda T,\lambda f(\lambda)]$ 令 $f_2^{(1)}(x)=q^{-1}\circ(\lambda f_1(\frac{x}{\lambda})), f_2^{(1)}(\lambda^2)=q^{-1}\circ(\lambda f_1(\lambda))=T_1, f_2^{(1)}(\lambda^2T)=q^{-1}\circ(\lambda f_1(\lambda T))=T_2$;

当 $x\in[\lambda^3,\lambda^2T]$ 时，$\frac{x}{\lambda}\in[\lambda^2,\lambda T], \lambda f_1(\frac{x}{\lambda})\in[\lambda T,\lambda T_1]$，令 $f_2^{(2)}(x)=h^{-1}\circ(\lambda f_1(\frac{x}{\lambda})), f_2^{(2)}(x)=T$. 令

$$f_2(x)=\begin{cases} f_2^{(1)}(x), & x\in[\lambda^2T,\lambda^2], \\ f_2^{(2)}(x), & x\in[\lambda^3,\lambda^2T]\end{cases}.$$

(iii) 对任 $n\geqslant 3$，归纳定义 $f_n(x)=h^{-1}\circ(\lambda f_{n-1}(\frac{x}{\lambda})), x\in I_n$，容易验证，这样的定义是有意义的.

现用数学归纳法证明 $f_n(\lambda^n)=f_{n-1}(\lambda^n)$. 当 $n=3$ 时，$f_3(\lambda^3)=h^{-1}\circ(\lambda f_2(\lambda^2))=h^{-1}\circ(\lambda f_1(\lambda^2))=f_2(\lambda^3)$. 假设 $n=k$ 时，$f_k(\lambda^k)=f_{k-1}(\lambda^k)$. 那么 $f_{k+1}(\lambda^{k+1})=h^{-1}\circ(\lambda f_k(\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda}))=h^{-1}\circ(\lambda f_{k-1}(\lambda^k))=f_k(\lambda^{k+1})$，从而，对一切 $n\geqslant 3, f_n(\lambda^n)=f_{n-1}(\lambda^n)$.

根据 (i)、(ii)、(iii)，我们定义

$$F(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{当 } x\in I_n \text{ 时}; \\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

下证 $F(x)$ 是连续，由上面构造可知；只须证明 F 在 $x=0$ 处连续即可. 因为 λ^2 是 $f_2(x)$ 的最小值点，那么，(λ^n) 是 $f_n(x)$ 有最小值点 $(n\geqslant 2)$，而 $f_n(\lambda^n)=f_{n-1}(\lambda^n)\geqslant f_{n-1}(\lambda^{n-1})$ $(n\geqslant 3)$，从而 $\{f_n(\lambda^n)\}_{n=2}^{+\infty}$ 是递增的数列，且 $f_n(\lambda^n)\in[T_2,1]$ $(n\geqslant 3)$，令

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda^n)=T$$

由 $h(f^{n+1}(\lambda^{n+1}))=\lambda f_n(\lambda^n)$ 两边取 $n\to+\infty$ 得:

$$h(T)=\lambda T$$

由条件 (4) 知 $T=1=F(0)$，而 $F|_{[0,\lambda^n]}$ 的最小值是 λ^n，所以

$$\lim_{n\to 0}F(x)=\lim_{\lambda^n\to 0}f_n(\lambda^n)=1=F(0)$$

即 F 在 $x=0$ 处连续，至于 F 是方程 (1) 的连续解. 由构造很容易验证.

定理 2 设 $f:[\lambda,1]\to[0,1]$ $(0<\lambda<1)$ 是个连续函数且满足条件:

(1) $f(1)=\lambda$ 且 $f^2(\lambda)=\lambda^2$;

(2) 存在点 $T\in(\lambda,1)$，使 $f(T)=0$, $\lambda<f(\lambda)<T$, $f|_{[f(\lambda),1]}$ 是单谷的且 f 在 $[\lambda,1]$ 上的最大值是 $f(\lambda)$;

(3) 方程 $f(x)=\lambda x$ 上 $[\alpha,1]$ 有唯一的解 $x=1$. 那么，方程 (1) 存在连续解 F 满足 $F|_{[\lambda,1]}=f$.

证明 令 $p=f|_{[f(\lambda),T]}, q=f|_{[T,1]}, I_n=[\lambda^{n+1},\lambda^n]$. $n=0,1,2,3,\cdots$.

当 $x\in I_0$ 时，令 $f_0(x)=f(x)$；取

$$f_1(x)=\begin{cases} p^{-1}\circ(\lambda f_0(\frac{x}{\lambda})), & x\in[T\lambda,\lambda], \\ q^{-1}\circ(\lambda f_0(\frac{x}{\lambda})), & x\in[\lambda^2,\lambda T],\end{cases}$$

当 $x\in I_n$ 且 $n\geqslant 2$ 时，归纳定义

$$f_n(x)=p^1\circ(\lambda f_{n-1}(\frac{x}{\lambda})), \quad x\in I_n$$

然后取

$$f(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{当 } x\in I_n \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

仿照定理 1的证明可得这样的 $F(x)$ 也是方程 (1)式的连续解. 证毕

与 Feigenbaum 函数方程有关的近期文献，可参阅文献 [3, 4]

参考文献

1 杨 路，张景中. 第二类 Feigenbaum 函数方程. 中国科学 (A辑)，1985，12: 1061- 1069

2 廖公夫. 第二类 Feigenbaum 函数方程的单谷扩充连续解. 数学年刊，1988，9A(6): 649- 654.

3 陈芳跃. Feigenbaum 函数方程的光滑解. 科学通报，1988，12: 956- 957.

4 陈芳跃. Feigenbaum 重正化群方程的准确解. 高校应用数学学报，1996，4，387- 392.

(责任编辑：莫鼎新)