DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.02.005
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (2): 90~ 92

n维 Abel方程概周期解的存在性
Existence of Almost Periodic Solutions of n-dimentional Abel-type Equation

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学系　桂林市三里店　541004)
(Department of Mathematics and Computer Science,
Guangxi Normal University, Sanlidian, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要　利用 Schauder不动点定理及指数二分法,讨论了 n维 Abel概周期系统概周期解的存在性.得到了系统存在概周期解的一个充分条件.
关键词　指数二分法　不动点定理　概周期解　存在性
Abstract　By using the method of Schauder fixed point theorem and exponential dichotomy, the existence of almost periodic solutions of n-dimentional Abel-type equation was discussed and a sufficient condition was obtained.
Key words　expoential dichotomy, fixed point theorem, almost periodic solution, existence
中图法分类号　O175.14

1　引言

考虑微分方程系

$$\dot{x} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + f(t) \qquad (1)$$

其中 $(t,x)\in R\times R^n$, $x^i = (x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i)^T (i = 1,2,3)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$为连续 $n\times n$矩阵函数, $f(t)$为连续向量函数且 $f(t)\not\equiv 0$.

文献 [1]研究了 $n=1$时系统 (1)概周期解 (简记为 a.p解)的存在性.对于一般 n维系统 a.p解的存在性,作者尚未查到这方面的文献.本文结合运用 Schauder不动点定理和指数二分法,研究了 n维系统 (1)概周期解的存在性.如所知道,周期系统是概周期系统的特例.本文的结论对 n维周期系统也是成立的.

称系统

$$\dot{x} = C(t)x \qquad (2)$$

在 R上具有指数二分法是指存在常数 k, T及投影 P使 (2)的基本解矩阵 $X(t)$满足

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\mathrm{T}(t-s)}, \quad t \geqslant s$$
$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\mathrm{T}(s-t)}, \quad s \geqslant t$$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$, $|x| \triangleq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$,

对任意 $n\times n$矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $|A| \triangleq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

本文始终假设 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$为 a.p矩阵函数. $f(t)$为 a.p向量函数 (有关定义及性质参见 [3]).

令 $M_1 = \max\{\sup_{t\in R}|A(t)|, \sup_{t\in R}|B(t)|\}$,
$M_2 = \sup_{t\in R}|f(t)|\}$.

引理 1　设系统 (2)满足指数二分法,则系统

$$\dot{x} = C(t)x + f(t) \qquad (3)$$

具有唯一 a.p解 $h(t)$.

引理 2　D是 E中有界闭凸集. A: D→ D是全连续算子,则 A在 D中存在不动点.

引理 3　对一阶数量 a.p方程

$$\dot{x} = c(t)x + f(t) \qquad (4)$$

其中 $c(t)$, $f(t)$为实 a.p连续函数.若 $m(c(t)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T c(s)\,ds \neq 0$,则 (4)存在唯一 a.p解 $Z(t)$,由下式决定

1997-01-03收稿.

$$Z(t)=\begin{cases}-\int_t^{\infty} f(s)\exp\int_s^t c(f)\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}s, & m(c(t))>0\\ \int_{-\infty}^{t} f(s)\exp\int_s^t c(f)\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}s, & m(c(t))<0\end{cases}$$

2 主要结果

定理 1 设系统 (2) 满足投影为 P,指数为 T,常数为 k 的指数二分法,$A(t)$,$B(t)$,$C(t)$,$f(t)$ 为连续 a. p函数,且满足 $\frac{KM_1}{\mathrm{T}}\leqslant\frac{2}{27(1+\|\mathrm{h}\|)^2}$,其中 $\mathrm{h}(t)$ 为系统(3)的唯一 a. p解,这里 $\|\mathrm{h}\|=\sup_{t\in R}|\mathrm{h}(t)|$. 则系统 (1) 至少存在一个 a. p解.

证明 令 $W=\{u(t)|\,u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T, u(t)$ 为 R 上的连续 a. p函数$\}$,$\forall u(t)\in W$,定义范数 $\|u\|=\sup_{t\in R}|u(t)|$,由 a. p函数的性质知 $\|u\|$ 有界. 则 $(W,\|\cdot\|)$ 构成 Banach空间. $\forall u(t)\in W$,由引理 1知系统

$$\dot{x}=C(t)x+A(t)u^3+B(t)u^2+f(t) \qquad (5)$$

具有唯一 a. p解 $\varphi(t)$,且

$$\mathrm{h}(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(s)\{A(s)u^3(s)+B(s)u^2(s)+f(s)\}\mathrm{d}s-\int_t^{\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(s)\{A(s)u^3(s)+B(s)u^2(s)+f(s)\}\mathrm{d}s$$

令 T: $W\to W$, $Tu(t)=\mathrm{h}(t)$. 以下证明 T 是全连续算子.

i) T 是连续的.

设 $\mathrm{h}_n\in W$,且 $\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{h}_n-\mathrm{h}\|=0$,则有

$$|T\mathrm{h}_n-T\mathrm{h}|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|X(t)PX^{-1}(s)|\{|A(s)||u_n^3(s)-u^3(s)|+|B(s)||u_n^2(s)-u^2(s)|\}\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}|X(t)\times(I-P)X^{-1}(s)|\{|A(s)||u_n^3(s)-u^3(s)|+|B(s)||u_n^2(s)-u^2(s)|\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 3M_1\{\int_{-\infty}^{t}|X(t)PX^{-1}(s)|(\|u\|+1)^2\|u_n-u\|\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|(\|u\|+1)^2\|u_n-u\|\mathrm{d}s\}$$

$$\leqslant\frac{6kM_1}{\mathrm{T}}(\|u\|+1)^2\|u_n-u\|$$

这证明 T 是连续的.

ii) T 是紧致的.

$\forall\,\mathrm{h}_n(t)\in W$, $\|\mathrm{h}_n\|\leqslant M$,由于

$$\mathrm{j}_n(t)=T\mathrm{h}_n(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(s)\{A(s)\mathrm{h}_n^3(s)+B(s)\mathrm{h}_n^3(s)+f(s)\}\mathrm{d}s-\int_t^{\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(s)\{A(s)\mathrm{h}_n^3(s)+B(s)\mathrm{h}_n^3(s)+f(s)\}\mathrm{d}s$$

因此 $\|T\mathrm{h}_n\|\leqslant\frac{2k}{\mathrm{T}}(M_2+M_1(M^3+M^2))$,即 $\mathrm{j}_n(t)$ 一致有界. 又由于 $\mathrm{j}'_n(t)=C(t)\mathrm{j}_n(t)+A(t)\mathrm{h}_n^3(t)+B(t)\mathrm{h}_n^2(t)+f(t)$,从而 $\mathrm{j}'_n(t)$ 也是一致有界的. 这推出 $\mathrm{j}_n(t)$ 为等度连续,故有子序列 (仍记为 $\mathrm{j}_n(t)$ 在 R 的任一紧集上一致收敛. 又由 a. p函数的定义及性质知 $F=F(t,x)=A(t)x^3+B(t)x^2+C(t)x+f(x)$ 关于 t 对 $x\in R^n$ 是一致概周期的,从而对任意的 X>0,任一紧集 $S\subset R^n$,存在 $l=l(\mathrm{X},S)>0$, l 是 $T(F,\mathrm{X},S)$ 的包含区间长,由于 $\mathrm{j}_n(t)$ 在 $[0,l]$ 上一致收敛,故有 $N=(N(\mathrm{X},S)>0$,当 $n>N$ 时

$$|\mathrm{j}_n(t)-\mathrm{j}_{n+p}(t)|<\mathrm{X},\quad\forall t\in[0,l]$$

由文献 [3] 定理 5. 2知存在 W>0 使 $T(F,\mathrm{W},S)\subset T(\mathrm{j}_n,\mathrm{X})$,当 $t\notin[0,l]$ 时,存在 $\mathrm{f}\in T(F,\mathrm{W},S)\subset T(\mathrm{j}_n,\mathrm{X})$ 使 $t+\mathrm{f}\in[0,l]$. 于是

$$|\mathrm{j}_n(t)-\mathrm{j}_{n+p}(t)|\leqslant|\mathrm{j}_n(t)-\mathrm{j}_n(t+\mathrm{f})|+|\mathrm{j}_n(t+\mathrm{f})-\mathrm{j}_{n+p}(t+\mathrm{f})|+|\mathrm{j}_{n+p}(t+\mathrm{f})-\mathrm{j}_{n+p}(t)|<3\mathrm{X}$$

因此 $\{\mathrm{j}_n(t)\}$ 在 R 上一致收敛. 从而 T 是紧致的.

记 $L=\frac{1}{2}\|\mathrm{h}\|$,令 $G=\{u(t)|\,u(t)\in W,|u(t)-\mathrm{h}(t)|\leqslant L\}$,则 G 为 W 中的有界闭凸集. $\forall u(t)\in G$,

$$|Tu(t)-\mathrm{h}(t)|=|\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(s)\{A(s)u^3(s)+B(s)u^2(s)\}\mathrm{d}s-\int_t^{\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(s)\{A(s)u^3(s)+B(s)u^2(s)\}\mathrm{d}s|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}|X(t)PX^{-1}(s)|\{|A(s)||u^3(s)|+|B(s)|u^2(s)\}\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|\{|A(s)||u^3(s)|+|B(s)|u^2(s)\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\frac{2kM_1}{\mathrm{T}}(\|u\|^3+\|u\|^2)$$

$$\leqslant\frac{2kM_1}{\mathrm{T}}\{(L+\|\mathrm{h}\|)^3+(L+\|\mathrm{h}\|)^2\}$$

$$=\frac{2kM_1}{\mathrm{T}}(\frac{27}{8}\|\mathrm{h}\|^3+\frac{9}{4}\|\mathrm{h}\|^2)$$

$$\leqslant\frac{2kM_1}{\mathrm{T}}\frac{27}{8}(\|\mathrm{h}\|+1)\|\mathrm{h}\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\mathrm{h}\|=L$$

从而 $TG\subset G$. 即 T 是全连续算子,由引理 2知 T 在 G 内有不动点,亦即系统(1)存在 a. p解.

特殊地,当投影 $P=I$(或 0)时,我们有

定理 2 设系统(2)满足投影为 $P=I$(或 0),指数为 T,常数为 k 的指数二分法,$A(t)$,$B(t)$,$C(t)$,$f(t)$ 为连续的 a.p 函数,且满足 $\frac{KM_1}{\mathrm{T}}\leqslant\frac{1}{27(1+\|\mathrm{h}\|)^2}$,其中 $\mathrm{h}(t)$ 为系统(3)的唯一 a. p解,

$\|h\| = \sup_{t\in R}\|h(t)\|$, 则系统 (1) 至少存在一个 $a.p$ 解.

推论 1 对于数量方程

$$\dot{x} = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x + f(t) \qquad (6)$$

设 $a(t), b(t), c(t), d(t)$ 均为连续的 a. p函数. 记

$\underline{\lambda} = \inf_{t\in R}|c(t)|$, $\bar{g} = \sup_{t\in R}|a(t)|$,

$\bar{\_} = \sup_{t\in R}|b(t)|$, $\bar{e} = \sup_{t\in R}|d(t)|$.

当 $\bar{g} > \bar{\_}$ 时, 若 $\underline{\lambda}^3 > 27(\bar{e} + \underline{\lambda})^2\bar{g}$,

当 $\bar{g} < \bar{\_}$ 时, 若 $\underline{\lambda}^3 > 27(\bar{e} + \underline{\lambda})^2\bar{g}$.

则系统 (6) 存在 a. p解.

证明 仅需考虑 $\bar{e}\bar{g} \neq 0$ 的情形. 当 $c(t) < 0$ 时, $\dot{x} = c(t)x$ 的解满足

$$X(t)X^{-1}(s) = \exp\int_s^t c(f)\,df \leqslant e^{-\underline{\lambda}(t-s)}, \quad t \geqslant s$$

当 $c(t) > 0$ 时, $\dot{x} = c(t)x$ 的解满足

$$X(t)X^{-1}(s) = \exp\int_s^t c(f)\,df \leqslant e^{-\underline{\lambda}(s-t)}, \quad t \leqslant s$$

这对应于定理 2中的 $k = 1, T = \underline{\lambda}$. 而

$\dot{x} = c(t)x + d(t)$ 的唯一 a. p解

$$h(t) = \begin{cases} -\int_t^{\infty} d(s)\exp\int_s^t c(f)\,df\,ds, & c(t) > 0 \\ \int_{-\infty}^t d(s)\exp\int_s^t c(f)\,df\,ds, & c(t) < 0 \end{cases}$$

因此 $\|h\| = \|d\|\cdot\dfrac{1}{\underline{\lambda}} = \dfrac{\bar{e}}{\underline{\lambda}}$.

$$M_1 = \max\{\sup_{t\in R}|a(t)|, \sup_{t\in R}|b(t)|\} = \begin{cases} \bar{g} & (\bar{g} > \bar{\_}) \\ \bar{\_} & (\bar{g} < \bar{\_}) \end{cases}$$

因此当 $\bar{\_} < \bar{g}$ 时,

$$\frac{KM_1}{T} = \frac{\bar{g}}{\underline{\lambda}} < \frac{\underline{\lambda}^2}{27(\bar{e} + \underline{\lambda})^2} = \frac{1}{27\left(\dfrac{\bar{e} + \underline{\lambda}}{\underline{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{27\left(1 + \dfrac{\bar{e}}{\underline{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{27(1 + \|h\|)^2}$$

由定理 2, 系统 (6) 存在 a. p解 ($\bar{\_} > \bar{g}$ 的情形相仿).

由于周期函数是概周期函数的特例, 因此有

推论 2 当 $A(t), B(t), C(t), f(t)$ 均是 w 周期函数时, 在定理 1的条件下, 系统 (1) 存在 w 周期解.

参考文献

1 He chongyou. Almost periodic solutions of the Abel differential equation. Ann. of Diff. Eqs., 1985, 1 (1): 27~41.

2 Jiang Dongping. Almost periodic solutions of some first order differential equations. Ann. of Diff. Egs., 1986, 2 (1): 11~27.

3 何崇佑. 概周期微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1992.

4 Fink A M. Almost periodic differential equations. Springer-verlag. 1974.

(责任编辑: 莫鼎新)

(上接第 84页 Continue from page 84)

参考文献

1 Ramsey F P. On a Problem of formal Logic. Proc. London Math, Soc 2nd Ser, 1930, 30: 264~286.

2 Mckay B D, Zhang K M. The value of the Ramsey number R(3, 8). J Graph Theory, 1992, 16 (1): 99~105.

3 Stanislaw P R. Small Ramsey numbers. RIT-TR, 1993, 1: 2~3.

4 Graver J E, Yeckel J. Some graph theoretic results associated with Ramsey's theorem. J Comb Theory, 1968, 4: 125~175.

5 Geoffrey Exoo. A lower bound for R(5, 5). J Graph Theory, 1989, 13 (1): 97~98.

6 王清贤, 王攻本. Ramsey数 r(3, q) 的新下界. 北京大学学报 (自然科学版), 1989, 25 (1): 117~121.

7 宋恩民, 董向锋, 许如初. 求 Ramsey数下界的循环巧妙图搜索算法研究. 应用数学, 1995, 8 (4): 424~428.

8 谢继国, 张忠辅. 经典 Ramsey数 R(5, 9)和 R(5, 10) 的下界. 科学通报, 1996, 41 (20): 1918~1919.

9 Su Wenlong. The Estimation of Lower Bounds about some Ramsey Number Rn(3) and Rn(4). 广西科学, 1996, 3 (3): 4.

(责任编辑: 莫鼎新)