DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (4): 241- 243

关于精密的基本不等式*
On the Precise Basic Inequalities

王 升
Wang Sheng

(西江大学数学系 广东肇庆 526061)
(Dept. of Math., West River Univ., Zhaoqing, Guangdong, 526061)

摘要 对文献 [2]中的两个精密的基本不等式做了进一步的讨论,并给出一些较为精确的结果 (定理 1 定理 2和定理 3).

关键词 亚纯函数 极点 基本不等式

Abstract Two precise basic inequalities of reference [2] were discussed, and some more exact results, Theorem 1, Theorem 2 and Theorem 3 were obtained.

Key words meromorphic functions, pole, basic inequality
中图法分类号 O 174.52

自从 Hayman不等式[1]提出以来,许多学者都试图对其精确化,并做了不少的工作.其中文献 [2]给出了这一方面工作的进一步结果. 本文主要对文献 [2]中的两个基本不等式进行讨论,同时,就这方面的工作做进一步的探讨,并获得了一些具有一定启迪意义的结果. 相对而言,本文的结果,从某种意义来说,是较为精确的.

为了方便起见,现把文献 [2]中的两个基本不等式分别用定理 A和定理 B表示如下:

定理 A 设 $f(z)$于开平面超越亚纯,k为一正整数.若 X为任意的正数,则在 $r>0$时有

$$T(r,f) < \left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+XT(r,f)+S(r,f). \tag{1.1}$$

定理 B 命 $f(z),k,X$均如定理 A所设.若 a与 b均为有穷复数且 $b\neq 0$,则

$$T(r,f) < N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\frac{1}{2k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+XT(r,f)+S(r,f). \tag{1.2}$$

文献 [2]中指出(1.2)式右端正项密指量的系数和为 $2+\frac{1}{k}$,它比(1.1)式中右端正项密指量的系数和 $2+\frac{2}{k}$减少了一点.这暗示着定理 B较定理 A精密些,并且这两个定理是相互平行的.实际上,本文将证明,定理 B包含了定理 A.另外,文献 [2]中指出,当 k适当大时,(1.1)式可以说是近似于最佳的了.其实,对于 $f(z)$的极点重数为有限的情形,(1.1)式是不精确的.对此,本文将给出精确的结果,见定理 3.

本文中的标准符号均来自文献 [3]和文献 [1].

1 有关引理

引理 1[3] 设 $f_1(z),f_2(z)$为开平面上的亚纯函数,则

$$N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)=N(r,f_1)+N(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right).$$

引理 2[2] 命 $f(z),k,X$均如定理 A所设.若有穷复数 $b\neq 0$,则

$$\overline{N}(r,f) < \frac{1}{2k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{1}{2k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+XT(r,f)+S(r,f).$$

引理 3 命 $f(z),k,X,b$如引理 2所设.若 a为任一有穷复数,则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+2N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+2kXT(r,f)+S(r,f). \tag{2.1}$$

1996-12-18收稿。
* 广东省“千百十”工程基金(西大部分)资助项目。

证明　由第一基本定理及引理 1,我们有

$$m(r,\frac{f}{f^{(k)}})\leqslant m(r,\frac{f^{(k)}}{f})+N(r,\frac{f^{(k)}}{f})-N(r,\frac{f}{f^{(k)}})+O(1)=k\bar{N}(r,f)+N(r,\frac{1}{f})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+S(r,f). \qquad (2.2)$$

又因为

$$m(r,\frac{1}{f-a})\leqslant m(r,\frac{f}{f^{(k)}})+m(r,\frac{1}{f})+S(r,f).$$

所以,由此式结合(2.2)式,有

$$m(r,\frac{1}{f-a})-m(r,\frac{1}{f})\leqslant k\bar{N}(r,f)+N(r,\frac{1}{f})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+S(r,f).$$

应用第一基本定理及引理 2于上式,就推得(2.1)式成立.证毕.

引理 4[4]　命 $f(z),k,X$均如定理 A所设. 则

$$N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})>(k+1)\bar{N}(r,f)-N(r,f)-XT(r,f^{(k)})-S(r,f^{(k)}). \qquad (2.3)$$

由于

$$T(r,f^{(k)})<(k+1)T(r,f)+S(r,f)$$ [1],

因而,引理 4可变为如下形式

$$N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})>(k+1)\bar{N}(r,f)-N(r,f)-(k+1)XT(r,f)-S(r,f). \qquad (2.4)$$

引理 5　命 $f(z),k,X,a,b$如引理 3所设.若 $a\neq b$,则

$$N(r,f)-k\bar{N}(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-b})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+S(r,f). \qquad (2.5)$$

证明　因为

$$m(r,\frac{f-a}{f-b})\leqslant m(r,\frac{f-a}{f^{(k)}})+m(r,\frac{f^{(k)}}{f-b})=m(r,\frac{f-a}{f^{(k)}})+S(r,f).$$

由(2.2)式有

$$m(r,\frac{f-a}{f^{(k)}})=k\bar{N}(r,f)+N(r,\frac{1}{f-a})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+S(r,f).$$

由以上二式结合第一基本定理及引理 1,有

$$m(r,\frac{f-b}{f-a})=m(r,\frac{f-a}{f-b})+N(r,\frac{f-a}{f-b})-N(r,\frac{f-b}{f-a})+O(1)\leqslant m(r,\frac{f-a}{f^{(k)}})+N(r,\frac{1}{f-b})-N(r,\frac{1}{f-a})+S(r,f).$$

所以

$$m(r,\frac{f-b}{f-a})\leqslant k\bar{N}(r,f)+N(r,\frac{1}{f-b})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+S(r,f). \qquad (2.6)$$

另外,

$$m(r,\frac{f-b}{f-a})=m(r,1+\frac{a-b}{f-a})\geqslant m(r,\frac{1}{f-a})-O(1)\geqslant m(r,\frac{1}{f-a})-m(r,f)-O(1),$$

又由第一基本定理知,

$$m(r,\frac{1}{f-a})-m(r,f)=N(r,f)-N(r,\frac{1}{f-a})+O(1),$$

于是由以上二式代入(2.6)式即得(2.5)式.证毕.

2　定理 B推出定理 A

把(2.1)式代入(1.2)式得

$$T(r,f)<(1+\frac{1}{k})N(r,\frac{1}{f-a})+(1+\frac{1}{k})N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b})-N(1+\frac{1}{f^{(k)}})+2XT(r,f)+S(r,f).$$

当令 $a=0,b=1$时,即得到(1.1)式.证毕.

3　定理及其证明

定理 1　命 $f(z),k,X,a,b$均如引理 5所设.则

$$T(r,f)<2N(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-b})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b})-N(r,\frac{1}{f^{(k)}})+(k+1)XT(r,f)+S(r,f). \qquad (4.1)$$

证明　由(2.4)式代入 Milloux定理[1,2]后得

$$T(r,f)<N(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b})+N(r,f)-k\bar{N}(r,f)+(k+1)XT(r,f)+S(r,f). \qquad (4.2)$$

由(2.5)式代入(4.2)式,即得到(4.1)式.证毕.

定理 2　命 $f(z),k,X,a,b$均如定理 1所设.则

$$T(r,f^{(k)})<N(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-b})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b})+XT(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)}). \qquad (4.3)$$

证明　对函数 $f^{(k)}(z)$ 与三个复数 $0,b,\infty$ 应用 Nevanlinna第二基本定理,则

$$T(r,f^{(k)}) < \bar{N}(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}) - N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}) + S(r,f^{(k)}).$$

以(2.3)式代入上式得

$$T(r,f^{(k)}) < N(r,f) - k\bar{N}(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}) + XT(r,f^{(k)}) + S(r,f^{(k)}). \quad (4.4)$$

由(2.5)式代入(4.4)式,并注意到文献[2]中引理5及 $m(r,f^{(k)}/f) = S(r,f)$,易推得(4.3)式成立.证毕.

由定理1和定理2易推出以下定理成立.

定理3　命 $f(z),k,a,b,X$ 均如定理1所设.若 $f(z)$ 的极点重数不超过 k,则

(1) $T(r,f) < N(r,\frac{1}{f-a}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}) + (k+1)XT(r,f) + S(r,f)$;

(2) $T(r,f^{(k)}) < N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}) + XT(r,f^{(k)}) + S(r,f^{(k)})$.

它们的亏量和分别为

1) $W(a,f) + W(b,f^{(k)}) \leqslant 1$

其中

$$W(b,f^{(k)}) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,\frac{1}{f^{(k)}-b})}{T(r,f)}$$

2) $W(0,f^{(k)}) + W(b,f^{(k)}) \leqslant 1$.

注:对于极点重数为有限的一类超越亚纯函数而言,定理3的结果是精确的.那么,当 $f(z)$ 为任意超越亚纯函数,$T(z)$,$U(z)$ 为任两个判别亚纯函数且

$$T(r,T) = 0\{T(r,f)\},$$

$$T(r,U) = 0\{T(r,f)\},$$

k 为自然数.则是否以下两式总是成立?

$$T(r,f)(1-0(1)) < N(r,\frac{1}{f-T}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-U}), \quad r \overline{\in} E;$$

$$T(r,f^{(k)})(1-0(1)) < N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-U}), \quad r \overline{\in} E.$$

其中,E 表示测度有穷的 r 值集.

致谢

对高仕安教授曾给作者以真诚的惠助,作者深表谢意!

参考文献

1　W. Hayman. Meromorphic Functions, Oxford: Clarendon Press, 1964.
2　杨　乐. 精密的基本不等式与亏量和. 中国科学, A辑, 1990, 2: 113~121.
3　杨　乐. 值分布论及其新研究. 北京: 科学出版社, 1982.
4　杨　乐. 亚纯函数的导数总亏量的精确估计. 科学通报, 1990, 35 (16): 1208~1210.

(责任编辑: 蒋汉明)