DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.04.003
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (4): 246~ 250

最优化问题广义投影下的广义次可行方向算法*

A Generalized Subfeasible Directions Method for Optimization Problems Using Generalized Projection

简金宝
Jian Jinbao

(广西大学数学与信息科学系　南宁市西乡塘东路 10号　530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要　利用广义投影技术和次可行方向法思想建立了非线性等式与不等式约束最优化问题的一个算法.它采用广义投影代替了传统的转轴运算,而且广义投影阵只由 ε- 积极约束函数的梯度产生.对于不等式约束的辅助优化问题,该算法是一个次可行方向类算法,称之为广义次可行方向法.算法在较弱的条件下具有全局收敛性.

关键词　非线性等式与不等式约束　最优化问题　广义投影　广义次可行方向法　全局收敛性

Abstract　An algorithm for optimization problems with nonlinear equality and inequality constraints is presented by using the generalized projection and subfeasible directions method. It uses the generalized projection to replace the traditional pivotal operations, and the generalized projection matrices can be generated only by the gradients of constrained functions within the ε-active constrained set. This method is a subfeasible directions method for the inequality constraints assistant problem, we call it generalized subfeasible directions method. The algrithm possesses global convergence under weaker condictions.

Key words　nonlinear equality and inequality constraints, optimization problems, generalized projection, generalized subfeasible directions method, global convergence

中图法分类号　O 221.2

本文讨论如下一般约束的最优化问题:

$(P)\qquad \min\{f(x) | x\in R\}$

可行集　$R=\{x\in E^n | g_j(x)\leqslant 0, j=1,\cdots,m; g_i(x)=0, i=m+1,\cdots,m+l\}$

梯度投影法是求解非线性最优化问题有效而基本的方法之一,但为保证收敛性,传统的投影类算法都采用各种转轴运算[1~6],这无疑增加计算量和计算时间.最近赖炎连、高自友、贺国平在文献[7]中提出了广义梯度投影法的思想,克服了传统的转轴运算.新近简金宝[8]对该类方法进行了研究和改进,使得广义投影阵仅由 X- 积极约束函数梯度确定,将传统投影法和广义投影法结合于一体.本文是该项工作的继续和深入,将采用不可微罚函数作为效益函数,罚问题的约束条件只由原不等式约束组成,初始点不但可以任选,且方法是辅助问题的次可行方向法[6],搜索方向简单的一步式结构和线搜索模式的统一性使方法具有简单的结构和较小的计算量.另外,X的随意性使算法具有广泛的理论意义和实用价值.文中证明了算法收敛到(P)的 $K-T$点.

1　理论基础及算法

我们考虑(P)的辅助问题:

$$(AP_c)\qquad \min F_c(x)=f(x)+c\sum_{j=m+1}^{m+l}|g_j(x)|$$

$$s.t.\ x\in \tilde{R}=\{x\in E^n: g_j(x)\leqslant 0, j=1,\cdots,m\}$$

记 $L_1=\{1,\cdots,m\}, L_2=\{m+1,\cdots,m+l\}$, $L=L_1\cup L_2$.对 $x\in E^n$,

1995-09-20收稿。
* 广西自治区青年科学基金和广西区教委资助项目。

令 $h_0(x) = \max\{0, g_j(x), j \in L_1\}$, $H_0(x) = \sum_{j \in L_2} |g_j(x)|$, $j_0(x) = \max\{h_0(x), H_0(x)\}$,则

$$x \in R \Leftrightarrow h_0(x) = 0.\ x \in R \Leftrightarrow j_0(x) = 0.$$

令 $I_1(x, X) = \{j \in L_1: X \geqslant h_0(x) - g_j(x) \geqslant 0\}$, $I(x, X) = I_1(x, X) = I_1(x, X) \cup L_2$,

其中 $X \geqslant 0$.

全文始终作如下假设:

$(H) f, g_j \in C^1, j \in L$. 向量组 $\{5\ g_j(x), j \in I(x, 0)\}$线性无关,$\forall\ x \in E^n$.

为便于讨论,记 $I = I(x, X)$, $I_1 = I_1(x, X)$,定义

$$N_I(x) = (5\ g_j(x), j \in I), B_I(x) = (N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x))^{-1} N_I(x)^T \qquad (1)$$

$$P_I(x) = E - N_I(x) B_I(x), u_I(x) = (u_j(x), j \in I) = -B_I(x) 5\ f(x) \qquad (2)$$

$$H_I(x) = \mathrm{diag}[H_j(x), j \in I];\ H_j(x) = g_j(x) - h_0(x), j \in I_1, H_j(x) = 0, j \in L_2 \qquad (3)$$

称 $P_I(x)$为广义投影阵,关于以上定义有

引理 1 如 $H_j(x) \leqslant 0, j \in I$,且 $H_j(x) < 0$,当 $j \in I_1 \backslash I_1(x, 0)$.则矩阵$(N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x))$为正定阵.

证 对 $\forall\ y \in E^{|I|}, y \neq 0$,有

$$U \triangleq y^T (N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x)) y = \| N_I(x) y \|^2 - \sum_{j \in I} H_j(x) y_j^2 \geqslant 0.$$

如 $U = 0$,由假设有 $N_I(x) y = \sum_{j \in I} 5\ g_j(x) y_j \geqslant 0, y_j = 0, j \overline{\in} I_1(x, 0)$.于是 $\sum_{j \in I(x,0)} y_j 5\ g_j(x) = 0, y_j = 0, j \in I_1 \backslash I_1(x, 0)$.故由假设$(H)$知 $y = 0$. 这矛盾,即 $U > 0$,引理成立.

由引理 1和(3)立即知 $B_I(x)$有定义.

引理 2 E^n中的点 x为(P)的 $K - T$点,当且仅当

$$P_I(x) 5\ f(x) = 0, u_j(x) \geqslant 0, j \in I_1, j_0(x) = 0 \qquad (4)$$

证 对 $\forall\ x \in E^n$,易见

$$P_I(x) 5\ f(x) = 5\ f(x) + \sum_{j \in I} u_j(x) 5\ g_j(x),$$

$$N_I(x)^T P_I(x) 5\ f(x) = H_I(x) u_I(x) \qquad (5)$$

如(4)成立,则 $x \in R$,且由(5)知

$$5\ f(x) + \sum_{j \in I} u_j(x) 5\ g_j(x) = 0, u_j(x) g_j(x) = 0, u_j(x) \geqslant 0, j \in I_1.$$

即 x为(P)的 $K - T$点.

反之,如 x为(P)的 $K - T$点,则 $x \in R$, $j_0(x) = h_0(x) = 0$.

$$5\ f(x) + \sum_{j \in I} T_j 5\ g_j(x) = 0, T_j g_j(x) = 0, T_j \geqslant 0, j \in I_1 \qquad (6)$$

由(6)及 $h_0(x) = 0$知 $H_I(x) T = 0, T = (T_j, j \in I)$.

结合(6)易见: $N_I(x)^T 5\ f(x) + [N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x)] T = 0$,从而 $T = u_I(x)$.

将 $T = u_I(x)$代入(6)可知(4)成立.证毕

对固定的罚参数 c,定义 $F_c(x)$沿方向 $d \in E^n$的方向导数为

$$DF_c(x; d) = \lim_{t \to 0^+} (F_c(x + td) - F_c(x)) / t.$$

引理 3[7] 对任意方向 d 有

$$DF_c(x; d) = 5\ f(x)^T d + c\{\sum_{\substack{g_j > 0 \\ j \in L_2}} 5\ g_j(x)^T d - \sum_{\substack{g_j < 0 \\ j \in L_2}} 5\ g_j(x)^T d + \sum_{\substack{g_j = 0 \\ j \in L_2}} |5\ g_j(x)^T d|\} \qquad (7)$$

由 $P_I(x)$及 $B_I(x)$的定义可直接推出以下式子

$$y^T P_I(x) y = \| P_I(x) y \|^2 - \sum_{j \in I} H_j(x) Z_j^2,$$

$$E = B_I(x) y, \forall\ y \in E^n. \qquad (8)$$

$$N_I(x)^T P_I(x) = -H_I(x) B_I(x),$$

$$N_I(x)^T B_I(x)^T = E + H_I(x)(N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x))^{-1}. \qquad (9)$$

令 $T(x) = \sum_{j \in I_1} \min\{0, u_j(x)\}$,

$$U(x) = \sum_{j \in I_1} |u_I(x)| \qquad (10)$$

$$f(x) = -\| P_I(x) 5\ f(x) \|^2 + T(x) - H_0(x),$$

$$d(x) = (-f(x) + h_0(x) / (1 + 2U(x)) \qquad (11)$$

构造搜索方向

$$d(x) = -P_I(x) 5\ f(x) + B_I(x)^T V(x) \qquad (12)$$

$$V_j(x) = \begin{cases} -1 - d(x), j \in I_1, u_j(x) < 0 \\ -d(x), j \in I_1, u_I(x) \geqslant 0 \\ -g_j(x), j \in L_2 \end{cases} \qquad (13)$$

定理 1 如 $c \geqslant |u_j(x)| + 1, \forall\ j \in L_2$则

$$DF_c(x; d(x)) \leqslant -\frac{1}{2} d(x) + \frac{1}{2} h_0(x) \qquad (14)$$

证 由(5),(9)易见

$$N_I(x)^T d(x) = -H_I(x) u_I(x) + V(x) + H_I(x)(N_I(x)^T N_I(x) - H_I(x))^{-1} V(x) \qquad (15)$$

记 $I_1^0 = \{j\in L_1: g_j(x) = h_0(x)\}\subset I_1 = I_1(x, X)$, $I^0 = I_1^0\cup L_2$.则 $H_j(x) = 0, \forall j\in I^0$.故由(15),(13)有

$$5 g_j(x)^T d(x) = V_j(x) = - g_j(x), j\in L_2;$$

$$5 g_j(x)^T d(x) = \begin{cases} -1- d(x), j\in I_1^0, u_j < 0 \\ - d(x), j\in I_1^0, u_j\geqslant 0 \end{cases} \tag{16}$$

记 $I_{11} = \{j\in I_1, u_j(x)\geqslant 0\}$, $I_{12} = I_1\backslash I_{11}$, $\sum^+ = \sum_{j\in L_2, g_j>0}$, $\sum^- = \sum_{j\in L_2, g_j<0}$,由(7)及(16)有

$DF_c(x; d(x)) = 5 f(x)^T d(x) + c\{\sum^+ 5 g_j(x)^T d(x) - \sum^- 5 g_j(x)^T d(x) + \sum^0 | 5 g_j(x)^T d(x)|\}\leqslant - \| P_I(x) 5 f(x)\|^2 - \sum_{j\in I} u_j(x) V_j(x) - c\sum^+ g_j(x) + \sum^- g_j(x) = - \| P_I(x) 5 f(x)\|^2 + \sum_{j\in I_{11}} d(x) u_j(x) + \sum_{j\in I_{12}} (1+ d(x)) u_j(x) - \sum^+ (c - u_j(x)) g_j(x) + \sum^- (c+ u_j(x)) g_j(x)$

由假设有 $c - u_j(x)\geqslant 1, c+ u_j(x)\geqslant 1, \forall j\in L_2$.故由(10),(11)有

$DF_c(x; d(x)) \leqslant - \| P_I(x) 5 f(x)\|^2 + U(x) d(x) + (1+ d(x)) T(x) - H_0(x) = - \| P_I(x) 5 f(x)\|^2 - \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} h_0(x) - \frac{1}{2} d(x) + T(x) + T(x) d(x) - H_0(x) = f(x) - \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} h_0(x) - \frac{1}{2} d(x) + T(x) d(x)$

$DF_c(x; d(x))\leqslant \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} d(x) + \frac{1}{2} h_0(x) \leqslant - \frac{1}{2} d(x) + \frac{1}{2} h_0(x)$.证毕

定理 2 1) $x\in E^n$, x 为(P)的 $K - T$点,当且仅当 $d(x) = 0$.

2)如 $x\in R$(即 $h_0(x) = 0$),x 不是(P)的 $K - T$点,则沿方向 $d(x)$ 有 $DF_c(x; d(x)) < 0$,且 $d(x)$ 为 R 的可行方向.

3)如 $x\overline{\in} R$(从而 $d(x) > 0$),则当 $\lambda > 0$充分小时

$$g_j(x+ \lambda d(x)) - h_0(x)\leqslant - \frac{1}{4}\lambda d(x), \forall j\in L_1 \tag{17}$$

证明 由(11)有 $d(x)\geqslant 0$, $d(x) = 0$当且仅当 $f(x) = h_0(x) = 0$,又由引理 2知 x 为 $K - T$点当且仅当 $f(x) = h_0(x) = 0$.故 1)成立.当 $x\in R$, x 非 $K - T$点,有 $DF_c(x; d(x))\leqslant - \frac{1}{2} d(x) < 0$.由(16)知: $5 g_j(x)^T d(x)\leqslant - d(x) < 0$,当 $j\in I^\circ_1 = \{j| j\in L_1, g_j(x) = h_0(x) = 0\}$.于是 $d(x)$ 为 R的可行方向. 2)成立.

3)首先由 $j\in L_1\backslash I^\circ_1$时,$g_j(x) < h_0(x)$及连续性易知当 $\lambda > 0$充分小时: $g_j(x+ \lambda d(x)) < h_0(x) - \frac{1}{4}\lambda d(x)$.

对于 $j\in I^\circ_1\subset I_1$. $5 g_j(x)^T d(x)\leqslant - d(x) < - \frac{1}{4} d(x)$.故当 $\lambda > 0$充分小时, $g_j(x+ \lambda d(x)) - g_j(x)\leqslant - \frac{1}{4}\lambda d(x)$,即 $g_j(x+ \lambda d(x)) - h_0(x)\leqslant - \frac{1}{4}\lambda d(x)$.因此 3)成立.

有了以上结果,可以给出以下广义投影法

步 0 任取初始点 $x^1\in E^n$, $e> 0$, $c_0 = 1$, $k= 1$.

步 1 选 $X_k\geqslant 0$,计算 $I_{1k} = \{j\in L_1| X_k\geqslant h_0(x^k) - g_j(x^k)\geqslant 0\}$, $I_k = I_{1k}\cup L_2$.按(1),(2),(3),(10),(11),(12),(13)计算相应的 P_k, $u^k = (u_j^k, j\in I_k)$, T_k, U_k, f_k, d_k, g 及 d^k.

步 2 如 $d_k = 0$,则 x^k 为(P)的 $K - T$点,停.

步 3 调整参数 C.令 $q_k = \max\{| u_j^k|, j\in L_2\}+ 1$,如 $q_k > c_{k-1}$,令 $c_k = \max\{q_k, c_{k-1}+ e\}$,否则令 $c_k = c_{k-1}$.

步 4 求 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\}$中满足以下(18),(19)的最大值 λ_k.

$$(1- s_k)[F_{c_k}(x^k+ \lambda d^k) + F_{c_k}(x^k) + \frac{1}{4}\lambda d_k]\leqslant 0 \tag{18}$$

$$g_j(x^k+ \lambda d^k) - h_0(x^k)\leqslant - \frac{1}{4} s_k\lambda d_k, \forall j\in L_1 \tag{19}$$

令 $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k:= k+ 1$,转回步 1.

其中 $s_k = 1$,当 $h_0(x^k)> 0$; $s_k = 0$,当 $h_0(x^k) = 0$.

由(19)知:如 $x^t\in R$,即 $h_0(x^t) = 0$,则 $x^{t+1}\in R$.从而 $x^k\in R$, $s_k\equiv 0, \forall k\geqslant t$.

理论上说, X_k的选取十分灵活,我们给出两种特殊的选取法.

取法Ⅰ: X为一充分小的正数,令 $X_k\equiv X> 0, \forall k$

取法Ⅱ: $X_k = X+ \max\{h_0(x^k) - g_j(x^k): j\in L_1\}\geqslant X> 0$.此 $I_{1k}\equiv L_1$, $I_k\equiv L_1\cup L_2 = L$.投影阵 P_k由全部约束函数梯度确定[7].

定理 2保证了算法步 4的有限步终结性.

2 算法收敛性证明

如算法有限步终止于 x^k,由定理 2知 x^k为(P)的

$K-T$点.以下讨论假设算法产生无穷点列$\{x^k\}$.我们将证明$\{x^k\}$的任意极限点x^*一定是原问题(P)的$K-T$点.为此对X_k作假设

(F)存在$X>0$,使k充分大时,$X_k\geqslant X$.

显然以上取法Ⅰ,Ⅱ满足条件(F).

由(18),(19)易见只有以下两种情况之一发生.

情况A:$\exists t$使得$x^k\in\mathcal{R}$,$s_k=h_0(x^k)\equiv 0$,$\forall k\geqslant t$.

情况B:$\forall k=1,2,\cdots$,$x^k\in\mathcal{R}$,$s_k\equiv 1$,$h_0(x^k)>0$.

由于x^*为$\{x^k\}$的极限点,I_{1k},$\mathring{I}_{1k}=\{j\in L_1:$,$g_j(x^k)=h_0(x^k)\}$均为有限集$L_1$的子集.故存在子列$\mathcal{K}$使

$$x^k\to x^*,I_{1k}\equiv I_1,\mathring{I}_{1k}\equiv\mathring{I}_1,k\in\mathcal{K}.$$

故$I_k=I_{1k}\cup L_2\equiv I_1\cup L_2\triangleq I$,$k\in\mathcal{K}$.定义

$H_*=\mathrm{diag}[H_j^*,j\in I]$,$H_j^*=0$,$j\in L_2$.$H_j^*=g_j(x^*)-h_0(x^*)$,$j\in I_1$.

$N_*=(\nabla g_j(x^k),j\in I)$,$B_*=(N_*^TN_*-H_*)^{-1}N_*^T$,$P_*=E-N_*B_*$.

由(F)易见$\mathring{I}_1(x^*)=\{j\in L_1:g_j(x^*)=h_0(x^*)\}\subset I_{1k}\equiv I_1$.由引理1知以上$B_*$有定义.不难验证$H_*=H_I(x^*)$,(按(3)定义).

令$u^*=(u_j^*,j\in I)=-B_*\nabla f(x^*)$,类似(10),(11)定义T,U,f及d.则$u^K\to u^*$,$d_k\to d$,$k\in\mathcal{K}$.

由假设(H)知$\{V^K,k\in\mathcal{K}\}$有界,故可不妨设$V^k\to V^*=(V_j^*,j\in I)$,$k\in\mathcal{K}$,由(13)有

$V_j^*=-g_j(x^*)$,$j\in L_2$;$V_j^*=-1-d$,$j\in I_1$,$u_j^*<0$;$V_j^*=-d$,$j\in I_1$,$u_j^*>0$;$V_j^*\leqslant -d$,当$u_j^*=0$,$j\in I_1$ (20)

引理4 存在k_0使得$c_k\equiv c_{k0}\triangleq c$,$\forall k\geqslant k_0$.

此结论只须要求$\{x^k\}$有极限点x^*即可,无需$\{x^k\}$含于某一紧集的假设[7].

证 先证存在k_0使得$c_k\equiv c_{k0}\triangleq c$,$\forall k\geqslant k_0$,$k\in\mathcal{K}$.若不然,则存在$\mathcal{K}_1\subset\mathcal{K}$,$|\mathcal{K}_1|=+\infty$,使得$c_k=\max\{q_k,c_{k-1}+e\}$,$q_k>c_{k-1}$,$k\in\mathcal{K}_1$,由$q_k$的定义及$e>0$易见:$c_k\to+\infty$,$k\in\mathcal{K}_1$.又$\{c_k\}$单调不减,故$\lim\limits_{k\to\infty}c_k=+\infty$,再由$u^k\to u^*$有$\sup\{q_k,k\in\mathcal{K}\}<+\infty$.于是$\lim\limits_{k\in\mathcal{K}_1}c_{k-1}<+\infty$.这与$\lim\limits_{k\to\infty}c_k=+\infty$矛盾.由于$c_k\equiv c_{k0}\triangleq c$,$k\geqslant k_0$,$k\in\mathcal{K}$,$\{c_k\}$单调不减,故引理4成立.

由引理4及$c_k\geqslant q_k\geqslant|u_j^k|+1$,$j\in L_2$,有$c\geqslant|u_j^*|+1$,$j\in L_2$.

引理5 如x^*为(P)的非$K-T$点,则存在$\lambda_0>0$使得$\lambda_k\geqslant\lambda_0$,$\forall k\in\mathcal{K}$.

证 首先由定理2有$d=d(x^*)>0$.

1)对$j\in L_1\backslash\mathring{I}_1(x^*)=\{j\in L_1|h_0(x^*)\}-g_j(x^*)>0\}$.

$$g_j(x^k+\lambda d^k)-h_0(x^k)+\frac{1}{4}s_k\lambda d_k=g_j(x^k)-h_0(x^k)+\lambda(\frac{1}{4}s_kd_k+\nabla g_j(x^k)^Td^k)+o(\lambda).$$

令$d^*=-P_*\nabla f(x^*)+B_*^TV^*$,则$d^k\to d^*$,$k\in\mathcal{K}$.于是

$$g_j(x^k+\lambda d^k)-h_0(x^k)=g_j(x^k)-h_0(x^k)+O(\lambda)<\frac{1}{2}(g_j(x^*)-h_0(x^*))+O(\lambda).$$

因$g_j(x^*)-h_0(x^*)<0$,故$k\in\mathcal{K}$充分大时,

$$g_j(x^k+\lambda d^k)-h_0(x^k)\leqslant-\frac{1}{4}s_k\lambda d_k,j\in L_1\backslash\mathring{I}_1(x^*),\lambda>0\text{充分小}.$$

2)当$j\in\mathring{I}_1(x^*)$,由(15)有

$$N_*d^*=\lim_{k\in\mathcal{K}}N_I(x^k)^Td^k=-H_*u^*+V^*+H_*(N_*^TN_*-H_*)^{-1}V^*.$$

由$\mathring{I}_1(x^*)\subset I_1$及$H_j^*$的定义知:$H_j^*=0$,当$j\in\mathring{I}_1(x^*)$.于是$\nabla g_j(x^*)^Td^*=V_j^*\leqslant -d$(由(20)).由$\nabla g_j(x^k)^Td^k\to\nabla g_j(x^*)^Td^*\leqslant-d<-\frac{1}{2}d$及$d_k\to d<\frac{4}{3}d$,$k\in\mathcal{K}$.知当$k\in\mathcal{K}$充分大时

$$\nabla g_j(x^k)^Td^k<-\frac{1}{2}d,d_k<\frac{4}{3}d.$$

$$g_j(x^k+\lambda d^k)-h_0(x^k)+\frac{1}{4}s_k\lambda d_k=g_j(x^k)+\lambda\nabla g_j(x^k)^Td^k-h_0(x^k)+\frac{1}{4}s_k\lambda d_k+o(\lambda)\leqslant\lambda d(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s_k)+o(\lambda)\leqslant-\frac{1}{6}\lambda d+o(\lambda).$$

因此当$k\in\mathcal{K}$充分大及$\lambda>0$充分小有

$$g_j(x^k+\lambda d^k)-h_0(x^k)\leqslant-\frac{1}{4}s_k\lambda d_k,j\in\mathring{I}_1(x^*).$$

3)当情况B发生时,(18)式对任λ成立.当情况A发生时,$s_k\equiv 0=h_0(x^k)$.由定理1有

$$\lim_{\lambda\to 0}\{F_c(x^k+\lambda d^k)-F_c(x^k)+\frac{1}{4}\lambda d_k\}/\lambda=DFc(x^k;d^k)+\frac{1}{4}d_k\leqslant-\frac{1}{2}d_k+\frac{1}{4}d_k=-\frac{1}{4}d_k<-\frac{1}{8}d<0.$$

于是当$k\in\mathcal{K}$充分大及$\lambda>0$充分小有

$$F_c(x^k+\lambda d^k)-F_c(x^k)+\frac{1}{4}\lambda d_k\leqslant 0.$$

综合 1),2),3)及(18)(19)可知引理 5成立.

下面论证收敛性定理.

定理 3 假设(H)及(F)成立,则$\{x^k\}$的任何极限点x^*必为原问题(P)的$K-T$点.

证明 假设x^*不是(P)的$K-T$点,则$d_* > 0$.

当情况B发生时,$s_k \equiv 1$, $h_0(x^K) = \max\{g_j(x^k), j \in L_1\}$.由(19)有: $h_0(x^{k+1}) - h_0(x^k) \leqslant -\frac{1}{4}\lambda_k d_k < 0$.即$\{h_0(x^k)\}$单调下降,又$h_0(x^k) \to h_0(x^*)$, $k \in \mathscr{K}$; $h_0(x)$连续,故$\lim\limits_{k \to \infty} h_0(x^k) = h_0(x^*)$.由引理 5有

$$0 = h_0(x^*) - h_0(x^*) = \lim_{k \in \mathscr{K}} (h_0(x^{k+1}) - h_0(x^*)) \leqslant \lim_{k \in \mathscr{K}} -\frac{1}{4}\lambda_0 d_k = -\frac{1}{4}\lambda_0 d_* < 0.$$

这矛盾.

同理,当情况A发生时,$s_k \equiv 0$.利用$\{Fc(x^k)\}$的单调性和引理 5同样可导出矛盾.

故x^*一定为(P)的$K-T$点.证毕.

注 由算法步 4和定理 2可见,当$x^t \in \mathcal{R}$时,则对任何$k \geqslant t$, d^k为(AP_{c_k})的可行下降方向,$\{x^k\}$为(AP_{c_k})的可行下降点列.

参考文献

1 Yue Minyi, Han Jiye. Scientia Sinica, 1979.

2 堵丁柱,孙 捷.一个新的梯度投影法.计算数学, 1983, 4 378~386.

3 赖炎连.非线性规划的法向与梯度组合方向算法及其收敛性.系统科学与数学, 1990, 10 (2): 181-188.

4 堵丁柱.非线性约束条件下的梯度投影方法.应用数学学报, 1985, 8 (1): 7~16.

5 薛声家.数学研究与评论, 1984, 2: 87~92.

6 简金宝.非线性规划的一个全局收敛的次可行方向法.曲阜师范大学学报, 1992, 18 (4): 55~61.

7 赖炎连.高自友,贺国平.非线性最优化的广义梯度投影法.中国科学, 1992, 9 (A): 916~924.

8 简金宝.非线性规划改进的广义梯度投影法.广西科学, 1995, 2 (1): 10~14.

(责任编辑: 蒋汉明)

学生用品科技开发前景广阔

出席在广西南宁举行的中国学生用品开发与素质研讨会的专家呼吁:“我国学生用品科技开发前景广阔,研究与开发工作亟待加强。”

由中国教育学会和南宁市人民政府主办的这次研讨会,吸引了来自全国各地的 40多名专家、学者参加。会上专家们就学生用品与提高学生素质关系;我国学生用品开发规范化、专业化途径和发展方向等问题进行了探讨。不少专家认为,我国有 3.7亿幼儿、儿童、青少年,落实党的十五大精神,全面提高劳动者素质,必须从小抓起。而学生素质的培养又与学生用品有着密切关系,它与教学内容、教学方法一样,是教育的要素之一,以其独特的方式,作用于学生,对学生的学习、生活等发生影响。学生用品的研究与开发涉及营养、服装、玩具、计算机、图书等诸多领域,有着重要的现实意义和广阔前景。目前我国学生用品的研究与开发刚起步,有许多领域等待进一步探索。

专家们还就如何开发适应我国国情,符合科学规律,有利学生身心健康,适用、价廉、美观的学生用品等问题进行了讨论。

(贺根生)