DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.01.001
广西科学 Guangxi Sciences 1998, 5 (1): 1~ 3

Fourier- Legendre级数的绝对收敛
Absolute Convergence of Fourier- Legendre Series

张培璇
Zhang Peixuan

(山东大学数学系 山东济南 250100)
(Dept. Math., of Shandong Univ., Jinan, Shandong, 250100)

摘要 讨论尚未被研究的 Fourier- Legendre级数的绝对收敛问题.
关键词 Fourier- Legendre级数 绝对收敛 正测度
Abstract The convergence and approximation for Fourier- Legender have been studied recently in many works. This paper is devoted to the study of the unexplored absolute convergence of Fourier- Legendre series.
Key words Fourier- Legendre series, absolute convergence, positive measure
中图法分类号 O 173.1

设 $P_n(x)$ 是 Legendre多项式[1], $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上 L 可积,则级数

$$\sum_0^{\infty} C_n P_n(x) \tag{1}$$

$\left(C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier- Legendre级数 (简记 F. L级数), C_n 称为 F. L系数.

从 $|P_n(x)| \leqslant 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$, $|P_n(1)| = 1$, 可知当且仅当 $\sum\limits_0^{\infty} |C_n| < \infty$ 时,级数 (1) 在 $[-1, 1]$ 上处处绝对收敛,这是一个显而易见的平凡结果.

F. L级数 (及其推广) 部分和的收敛、匀敛以及逼近问题,从 60年代到 80年代已有很多文章进行了深入研究[2~4], 但是对于重要的绝对收敛问题, 除了上述的平凡结果外, 尚未被研究过, 本文试图着手研究它.

1 端点± 1的临界性

这里将通过一个反例指明, F. L级数的绝对收敛性和通常的三角级数是十分不同的, 三角级数:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

绝对收敛的经典结果,一般来说不能无条件的推广到 F. L级数中去.

对于三角级数 (2), 若它在 $[-\pi, \pi]$ 中的一个正测度点集上绝对收敛, 则它在 $[-\pi, \pi]$ 中处处绝对收敛[5], 但是对于 F. L级数, 即使它在 $(-1, 1)$ 中处处绝对收敛, 也不能断言在端点± 1处绝对收敛.

事实上, 设 $C_n^{(0)} = n^{-3/2}$, 从 $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)\right\}$ 是 $[-1, 1]$ 上的标准正交系[1]和 $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{k} |C_k^{(0)}|^2 < \infty$, 可推知

$$\sum_1^{\infty} C_n^{(0)} P_n(x) \tag{3}$$

是一个 F. L级数.

由 Bernstein不等式[1]

$$(\sin\theta)^{1/2} |P_n(\cos\theta)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{n\pi}}, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{4}$$

和 $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ 易知级数 (3) 在 $(-1, 1)$ 中绝对收敛,但在点 ± 1处不是绝对收敛.

然而有点意外的是有下面的简单事实:

若级数 (1) 在 $[-1, 1]$ 外复平面上一点 z_0 处绝对收敛,则级数 (1) 必在以 ± 1为焦点,其边界通过点 z_0 的闭椭圆面上,处处绝对收敛.

证明 设 ∂G_d 是以 ± 1为焦点,长短半轴之和为 d 的椭圆周,其内部记为 G_d, 又记 $\overline{G_d} = G_d + \partial G_d$.

1997-06-25收稿.

已知当 $n\to\infty$ 时,渐近表示式[1]:

$$P_n(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(z^2-1)^{-\frac14}(z+\sqrt{z^2-1})^{n+\frac12}[1+o(1)]$$

在 $[-1,1]$外的任何一个有界闭集上均匀成立.于是当 $z\in\partial G_d$ 时,有

$$M_2(d)n^{-\frac12}d^n\leqslant|P_n(z)|\leqslant M_1(d)n^{-\frac12}d^n$$

其中 $M_1(d),M_2(d)$ 是仅与 d 有关的正常数.

设 $z_0\in\partial G_d$,则由上式知,当 $z\in\partial G_{d_0}$ 时,

$$|P_n(z)|\leqslant M_1(d_0)/M_2(d_0)\cdot|P_n(z_0)| \qquad (5)$$

而由最大模原则[6],又知上面(5)式,当 z属于闭椭圆面 $\overline{G_d}$时恒成立,于是从级数(1)在 z_0处绝对收敛可推知其在$\overline{G_d}$上处处绝对收敛.

2 在正测度点集上绝对收敛

基于端点±1的临界性分析,自然要问,在什么条件下,从级数(1)在$(-1,1)$中一个正测度点集上绝对收敛,可推知其在$(-1,1)$中处处绝对收敛.下面的定理回答了这个问题.

定理 设 $f(x)$在$[-1,1]$中连续,且$f\in\mathrm{lip}_M\alpha$,$(0<\alpha\leqslant1)$.若其 F. L级数(1)在$(-1,1)$中的一个正测度点集上绝对收敛,则在$(-1,1)$中处处绝对收敛.

证明 分 3步进行

(I)先从已知条件 $f\in\mathrm{lip}_M\alpha,(0<\alpha\leqslant1)$推导出 F. L系数适合

$$|C_n|\leqslant 3\pi^\alpha Mn^{\frac12-\alpha}\qquad(n\geqslant7)\qquad(6)$$

事实上,由已知的 Jackson定理和 $f\in\mathrm{lip}_M\alpha$可推得,存在一个次数不大于 n的多项式 $T_n(x)$使得

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant M\pi^\alpha(n+1)^{-\alpha},\ -1\leqslant x\leqslant1\qquad(7)$$

Legendre多项式 $P_n(x)$是首项系数不为 0的 n次多项式,故 $T_n(x)$可表示成 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)$的线性组合,再从$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上的正交性[1],可知:

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)P_{n+1}(x)\mathrm{d}x=0$$

从而

$$C_{n+1}=\frac{2n+3}{2}\int_{-1}^{1}[f(x)-T_n(x)]P_{n+1}(x)\mathrm{d}x\qquad(8)$$

再从不等式(4),有

$$|P_{n+1}(x)|\leqslant\sqrt2[(n+1)\pi\sqrt{1-x^2}]^{-\frac12}\quad(-1\leqslant x\leqslant1)\qquad(9)$$

结合(7)~(9)式,并注意到

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})^{-\frac12}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac\pi2}\sin^{\frac12}\theta\,\mathrm{d}\theta\leqslant\pi$$

有

$$|C_{n+1}|\leqslant\sqrt{2\pi}\,\pi^\alpha M\frac{n+2}{(n+1)^{1+\frac12}}\leqslant3\pi^\alpha M(n+1)^{\frac12-\alpha}\quad(n\geqslant6)$$

由此即得(6)式.

作为 F. L系数的准确估计,(6)式有独立意义.

(II)由已知条件,F. L级数(1)在$(-1,1)$中一个正测度点集 E上绝对收敛.设在映照 $x=\cos\theta$下,$(0,\pi)$中点集 F的象是 E,易见 F的测度$|F|>0$.取$\varepsilon>0$充分小,使交集

$$F'=F\cap[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]\qquad(10)$$

仍有$|F'|>0$,因为 $F'\subset F$,故有

$$\sum_0^\infty|C_nP_n(\cos\theta)|<\infty\quad(\theta\in F')\qquad(11)$$

对于上述$\varepsilon>0$,由 $P_n(x)$在$(-1,1)$中的渐近公式[1]知,当$-\pi+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$时,均匀地有

$$P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac2\pi}\frac{1}{\sqrt{n\sin\theta}}\cos[(n+\frac12)\theta-\frac\pi4]+O_\varepsilon(n^{-\frac32})\qquad(12)$$

由(6)式和$\alpha>0$,有

$$\sum_1^\infty|C_n|n^{-\frac32}<\infty\qquad(13)$$

结合(11)式~(13)式可得,级数

$$\sum_1^\infty\frac{C_n}{\sqrt n}\cos[(n+\frac12)\theta-\frac\pi4]\qquad(14)$$

在$(-\pi,\pi)$中的正测度点集 F'上绝对收敛.

(III)从级数(14)在 F'上绝对收敛,可推得

$$\sum_1^\infty\frac{|C_n|}{\sqrt n}\cos^2[(n+\frac12)\theta-\frac\pi4]<\infty,\quad\theta\in F'$$

再由叶果洛夫定理[6]知,存在正测度点集 F'',$F''\subset F'$,且在 F''上,有

$$\sum_1^\infty\frac{|C_n|}{\sqrt n}\cos^2[(n+\frac12)\theta-\frac\pi4]=g(\theta)\quad(均匀成立)\qquad(15)$$

易见“和函数”$g(\theta)$在点集 F''上连续.

在(15)式两边沿 F''积分,并注意到三角级数中

的 Riemann-Lebesgue引理[5], 有

$$\int_{F''} g(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{|C_n|}{n}\left[|F''| + \int_{F''}\sin(2n+1)\theta\,d\theta\right] = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{|C_n|}{n}\left[|F''| + o(1)\right]$$

由此从 $|F''| > 0$,可得 $\sum_{1}^{\infty} \frac{|C_n|}{n} < \infty$,进而知级数 (14) 处处绝对收敛,再由 (12) 式得到级数

$$\sum_{0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)$$

在 $[-c+X, c-X]$ 中绝对收敛,又由于 $X>0$可任意小,最后得知,级数 $\sum_{0}^{\infty} C_n P_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 中处处绝对收敛. 定理证毕.

参考文献

1 Szegö G. Orthogonal polynomials. Amer Math Soc Colloq Publ, 1967, 23.

2 Suetin P K. On representation of continuous and differentiable function by Fourier series for Legendre polynomial. Dokl Akad Nauk SSSR, 1964, 158: 1257~ 1277.

3 Gupta DP, Mazhar SM. Approximation of continuous functions by ultraspherical series. Approx Theory and its Appl, 1986, 2 (3): 1~ 6.

4 Sun Xiehua. On approximation of continuous functions by Jacobi series. Approx Theory and its Appl, 1988, 4 (3): 79~ 85.

5 陈建功. 三角级数论. 上册. 上海: 上海科学技术出版社, 1964.

6 梯其马希. 函数论. 北京: 科学出版社, 1962.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)

1997年度最有代表性的研究工作及中国科学家的贡献: 人类基因组计划

人类基因组计划 (Human Genome Project) 是美国科学家 Renato Dulbecco于 1986年在《科学》杂志上发表的短文中率先提出。旨在阐明人类基因的全部序列，从整体上破译人类遗传信息，使人类第一次在分子水平上认识自我。

目前，社会各界投资已达 100多亿美元，目标是在 2005年阐明人类基因组: 3×10^9碱基对的 DNA序列。根据报道，全部完成此计划有望提前至 2002年左右。计划的进行除了最初计划的作图 (包括遗传图谱、物理图谱) 和测序之外，已扩展到了基因的定位与识别，尤其是与人类重大疾病相关基因的定位和识别、基因组多样性研究等重要内容。我国于 1993年开始实施“中国人类基因组计划”，并在中华多民族基因组的保存、基因组研究新技术的引进和若干位点疾病基因的研究等方面取得了诸多进展。由陈竺院士领导的上海血液学研究所，在白血病相关基因的研究方面有所突破，即克隆了急性早幼粒细胞白血病的致癌基因之后，又对具有我国特色的应用维甲酸和三氧化二砷治疗白血病新方法的分子机制进行深入的研究，目前已分离到一大批受维甲酸和三氧化二砷调控的新基因，并进行了结构和功能的研究，1996年 8月 2日《科学》关于“急性早幼粒细胞白血病诱导凋亡治疗”发表了题为“古药新用”的新闻，特别指出“用全反式维甲酸而使人人震惊的研究小组又有了出人意料的新发现”，认为这是“研究者应用现代生物学技术，科学地阐释传统中医学在肿瘤治疗学上的理论，并将它纳入到现代医学的主流之中”。近两年来他们在国际著名学术刊物《美国科学院学报》和《血液》等发表了 10余篇系列论文。此外，在正常造血干细胞表达基因的研究中，已完成了 1万余条 cDNA片段的测序。这些工作在国际上引起了较大反响。中国科学家的工作将成为国际人类基因组研究的重要组成部分。

(摘自中国科学院《科学发展报告》, 1997)