

# 5个新的素数阶循环图\*

## Five New Prime Order Cyclic Graphs

苏文龙

罗海鹏\*

张正铀\*\*\*

Su Wenlong

Luo Haipeng

Zhang Zhenyu

(广西梧州一中 梧州 543002)

(Wuzhou No. 1 Middle School, Wuzhou, Guangxi, 543002)

摘要 通过计算机构造了5个新的素数阶循环图,从而获得了 Ramsey 数的5个下界:  $R(6, 13) \geq 242$ ,  $R(8, 17) \geq 602$ ,  $R(8, 18) \geq 642$ ,  $R(8, 19) \geq 684$ ,  $R(8, 20) \geq 762$ . 这些结果填补了 Ramsey 数研究的5个空白.

关键词 Ramsey 数 下界 素数阶循环图

**Abstract** Five new prime order cyclic graphs were constructed by computer, so lower bounds of five Ramsey numbers were obtained:  $R(6, 13) \geq 242$ ,  $R(8, 17) \geq 602$ ,  $R(8, 18) \geq 642$ ,  $R(8, 19) \geq 684$ ,  $R(8, 20) \geq 762$ . These results fill five blanks in research of Ramsey number.

**Key words** Ramsey number, Lower bound, prime order cyclic graph

中图法分类号 O 157.5

### 1 Ramsey 数 $R(6, n)$ 和 $R(8, n)$ 的已知下界

对于给定的整数  $m, n \geq 2$ , 求最小的正整数  $R$ , 使得任意联边的不小于  $R$  个顶点的图  $G$  中一定含有  $m$  点完全子图  $K_m$  或者  $n$  独立点集  $K_n$ , 这个正整数  $R$  就称为 Ramsey 数  $R(m, n)$ <sup>[1]</sup>. 确定 Ramsey 数是组合数学和图论中著名的难题.

关于 Ramsey 数  $R(6, n)$ , 目前已知的情况为:  $R(6, 3) = 18$ <sup>[2]</sup>,  $R(6, 4) \geq 35$ <sup>[3]</sup>,  $R(6, 5) \geq 58$ <sup>[3]</sup>,  $R(6, 6) \geq 102$ <sup>[4]</sup>, 除此之外, 其他都是未知的.

关于 Ramsey 数  $R(8, n)$ , 除了平凡的  $R(8, 2) = 8$ , 要确定它们的准确值是非常困难的. 1990年 B. D. McKay 和张克民<sup>[5]</sup>采用穷举法, 利用 11台 Sun 工作站运算了两万小时证明了  $R(8, 3) = 28$ . 当  $n \geq 4$  时目前仅知道3个不平凡的下界:  $R(8, 4) \geq 53$ <sup>[3]</sup>,  $R(8, 5) \geq 95$ <sup>[6]</sup> 和  $R(8, 8) \geq 282$ <sup>[7]</sup>. 除此之外, 其他都是未知的.

我们在 Ramsey 数研究中应用了数论和群论的一些新方法, 利用素数阶循环图的平移和旋转等性质改进了产生参数的方法, 提高了运算效率, 得到一系列 Ramsey 数的新下界<sup>[8-11]</sup>. 本文把这种方法

用于 Ramsey 数  $R(6, n)$  和  $R(8, n)$  的探索, 得到一些新的下界.

### 2 Ramsey 数 $R(6, 13)$ , $R(8, 17)$ , $R(8, 18)$ , $R(8, 19)$ 和 $R(8, 20)$ 的新下界

对于给定的素数  $p$ , 记  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , 选定参数集合  $S \subset \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$ . 设图  $G$  的顶点集  $V_G = Z_p$ , 边集定义为: 两个顶点  $x$  和  $y$  相邻当且仅当  $\min\{|x-y|, p-|x-y|\} \in S$ . 我们称图  $G$  为关于参数集合  $S$  的  $p$  阶循环图并记为  $G_p(S)$ .

据此我们构造了5个素数阶循环图:

(1) 给定素数  $p_1 = 241$  与图  $G$  边集的参数集合  $S_1 = \{1, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 18, 29, 35, 36, 37, 43, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 60, 65, 70, 75, 77, 80, 82, 83, 86, 87, 88, 91, 94, 96, 98, 102, 104, 110, 112, 113, 114, 115, 117, 119, 120\}$ .

(2) 给定素数  $p_2 = 601$  与图  $G$  边集的参数集合  $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 31, 32, 38, 44, 45, 47, 48, 52, 54, 56, 59, 62, 64, 65, 67, 75, 76, 79, 81, 85, 88, 89, 90, 94, 96, 101, 103, 104, 105, 108, 109, 111, 112, 118, 119, 123, 124, 125, 128, 129, 130, 134, 139, 147, 150, 151, 152, 153, 155, 157, 158, 162, 165, 167, 169, 170, 176, 178, 180, 181, 185, 187, 188, 189, 192, 197, 202, 206, 207, 208, 210, 216, 217, 218, 222, 223, 224, 225,$

1997-09-15收稿

\* 广西科学基金资助项目.

\*\* 广西科学院, 南宁市江南路西一里 20号, 530031(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jianganlu, Nanning, Guangxi, 530031)

\*\*\* 广西区科委, 南宁市新民路, 530012(Commission of Science and Technology of Guangxi, Xinminlu, Nanning, Guangxi, 530012)

227, 231, 236, 238, 239, 241, 245, 246, 248, 249, 250, 256, 258, 260, 261, 263, 267, 268, 271, 277, 278, 285, 287, 291, 294, 295, 297, 299, 300}.

(3) 给定素数  $p_3 = 641$  与图  $G$  边集的参数集合

$S_3 = \{1, 3, 4, 10, 12, 14, 16, 22, 25, 27, 30, 31, 34, 35, 40, 42, 43, 47, 48, 53, 55, 56, 58, 61, 64, 75, 78, 81, 82, 85, 88, 91, 93, 97, 100, 102, 105, 107, 108, 109, 111, 118, 120, 124, 126, 127, 133, 134, 136, 137, 139, 140, 145, 147, 154, 160, 161, 167, 168, 169, 171, 172, 174, 179, 183, 187, 188, 192, 195, 197, 202, 203, 205, 206, 207, 209, 211, 212, 213, 220, 221, 224, 232, 233, 234, 239, 241, 243, 244, 250, 253, 255, 256, 258, 262, 269, 270, 277, 282, 287, 289, 291, 295, 300, 301, 306, 310, 312, 313, 315, 317, 318\}$ .

(4) 给定素数  $p_4 = 683$  与图  $G$  边集的参数集合

$S_4 = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 31, 37, 38, 40, 41, 45, 46, 52, 56, 57, 60, 62, 63, 67, 69, 73, 76, 78, 79, 80, 81, 84, 93, 94, 101, 104, 110, 111, 112, 114, 116, 120, 123, 124, 125, 128, 135, 138, 143, 146, 151, 154, 156, 158, 163, 164, 166, 168, 170, 171, 173, 175, 179, 180, 185, 186, 189, 191, 193, 194, 201, 207, 209, 214, 215, 219, 220, 221, 226, 228, 230, 234, 237, 238, 240, 241, 243, 245, 250, 252, 253, 254, 259, 265, 269, 278, 279, 282, 283, 286, 292, 299, 301, 303, 307, 308, 311, 312, 314, 316, 322, 323, 325, 328, 330, 333, 335, 336, 337, 340, 341\}$ .

(5) 给定素数  $p_5 = 761$  与图  $G$  边集的参数集合

$S_5 = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 20, 22, 25, 26, 30, 31, 35, 37, 47, 49, 50, 52, 55, 56, 59, 60, 67, 70, 73, 74, 81, 82, 94, 98, 100, 102, 109, 110, 111, 112, 114, 118, 122, 123, 124, 125, 130, 136, 141, 146, 147, 150, 151, 152, 153, 155, 162, 164, 167, 171, 174, 175, 177, 185, 187, 191, 193, 194, 201, 204, 206, 207, 209, 211, 213, 216, 217, 218, 222, 223, 227, 228, 232, 233, 235, 244, 245, 248, 250, 251, 258, 259, 260, 261, 263, 267, 269, 271, 272, 274, 275, 280, 282, 284, 288, 291, 294, 295, 297, 300, 302, 303, 304, 319, 324, 328, 329, 335, 343, 347, 348, 349, 350, 351, 354, 356, 357, 362, 365, 370, 373, 374, 379\}$ .

我们在计算机上验证了: 如前定义的素数阶循环图  $G_{241}(S_1)$  中既不含 6 点完全子图  $K_6$ , 也不含 13 独立点集  $K_{13}$ ; 循环图  $G_{601}(S_2)$  中既不含 8 点完全子

图  $K_8$ , 也不含 17 独立点集  $K_{17}$ ; 循环图  $G_{641}(S_3)$  中既不含 8 点完全子图  $K_8$ , 也不含 18 独立点集  $K_{18}$ ; 循环图  $G_{683}(S_4)$  中既不含 8 点完全子图  $K_8$ , 也不含 19 独立点集  $K_{19}$ ; 循环图  $G_{761}(S_5)$  中既不含 8 点完全子图  $K_8$ , 也不含 20 独立点集  $K_{20}$ . 由于这些结论并据 Ramsey 定理, 我们就证明了

定理 1  $R(6, 13) \geq 242, R(8, 17) \geq 602, R(8, 18) \geq 642, R(8, 19) \geq 684, R(8, 20) \geq 762$ .

上述结果优于根据递推公式算出的相应平凡的结果, 它们填补了文献 [12] 中 Ramsey 数研究的 5 个空白.

### 参考文献

- 1 李乔. 组合数学基础. 高等教育出版社, 1993. 11.
- 2 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey's theorem. Ph D thesis, University of Waterloo, January 1966.
- 3 Exoo G. Applying optimization algorithm to Ramsey problems. In Alavi Y. Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, SIAM Philadelphia, 1989. 175~ 179.
- 4 Kalbfleisch J G. Construction of special edge-chromatic graphs. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, (8): 575 ~ 584.
- 5 McKay B D, Zhang Kemin. The value of the Ramsey number  $R(3, 8)$ . Journal of Graph Theory, 1992, (16): 99~ 105.
- 6 Piwakowski K. Applying tabu search to determine new Ramsey graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, <http://ejc.math.gatech.edu/8080/Journal/ejewce.html>, # R6, 1996, (3) 4 pages.
- 7 Burling J P, Reyner S W. Some lower bounds of the Ramsey numbers  $n(k, k)$ . Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1972, (13): 168~ 169.
- 8 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some Ramsey numbers  $R_n(3)$  and  $R_n(4)$ . 广西科学, 1996, 3 (3): 4~ 7.
- 9 苏文龙, 罗海鹏, 李乔. 经典 Ramsey 数  $R(4, 12)$ ,  $R(5, 11)$  和  $R(5, 12)$  的新下界. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.
- 10 苏文龙, 罗海鹏, 吴康. 经典 Ramsey 数  $R(5, 12)$ ,  $R(5, 13)$ ,  $R(5, 14)$  和  $R(5, 15)$  的新下界. 广西大学学报, 1997, 22(4): 298~ 299.
- 11 苏文龙, 罗海鹏, 吴康. 4 个 Ramsey 数  $R(5, 12)$ ,  $R(5, 13)$ ,  $R(5, 14)$  和  $R(5, 15)$  的新下界. 华中师范大学学报, 1997 专辑: 70~ 71.
- 12 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics I (1994), DS1 1~ 27, Revision# 4 July 16, 1997.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)