DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.01.003

广西科学 Guangxi Sciences 1998, 5 (1): 6~ 7, 11

圆周上连续函数的新逼近工具

A New Approximation Tool for Continuous Functions on Circle

木乐华

Mu Lehua

(山东大学数学系　山东济南　250100)

(Dept. Math., of Shandong Univ., Jinan, Shandong, 250100)

摘要　为单位圆周上的连续函数的逼近提供了新的工具.

关键词　连续函数　逼近　Bessel函数

Abstract　A new approximation tool is given for continuous functions on the unit circle.

Key words　continuous function, approximation tool, Bessel function

中图法分类号　O 174

讨论单位圆周 Γ上的连续函数的逼近问题.

单位圆周 Γ上的连续函数 $f(z)$ 一般来说是不能被多项式逼近[1],除非它能够延拓成单位圆内解析,闭单位圆域上连续的函数.甚至,就像 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 这样简单的函数在 Γ上也不能被多项式逼近.鉴于单位圆周上连续函数逼近的重要性,需要寻找新的逼近工具.

令 $J_0(z)$ 是零阶 Bessel函数[2],

$$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta)\,d\theta.$$

$P(z)$、$Q(z)$ 和 $R(z)$ 表示多项式.本文将证明函数族 $\{P(z)J_0(\frac{1}{z})+Q(z)J'_0(\frac{1}{z})+R(z)\}$是圆周 Γ上连续函数的理想逼近工具.准确地说,有下面的定理.在叙述定理之前先作两点说明:

1) 若 $h(\theta)$ 是以 2π为周期的连续函数,则表示其光滑程度的 r阶连续模由下式:

$$\omega_r(h,\delta)=\max_{\substack{\theta,t\\|t|\leqslant\delta}}|\triangle_t^r h(\theta)|,\ (\triangle_t^r \text{ 是 } r\text{阶差分})$$

定义的[3].

2) 本文中记号 $\|\cdot\|_l$ 表示最大模范数,即

$$\|h^*\|_l=\max_{z\in l}|h^*(z)|,$$

这里 $h^*(z)$ 是 l 上的连续函数.

定理　若 $f(z)$ 在单位圆周 Γ上连续,记 $F(\theta)=f(e^{-i\theta})$,则存在$\leqslant n$次的多项式 $P(z)$,$Q(z)$,$R(z)$ 使得对任何 $0<\delta<1$,函数

$$L_n(z)=P(z)J_0(\frac{1}{z})+Q(z)J'_0(\frac{1}{z})+R(z)$$

(J'_0是 J_0的导函数)适合

$$\|f(z)-L_n(z)\|_\Gamma=O_r[\omega_r(F;\frac{1}{n})]+O_\delta(\delta^n\|f\|_\Gamma),\tag{1}$$

这里项“$O_{\lambda,\cdots}$”的界仅与 $\lambda,\cdots$ 有关.

作为推论,若又知 $F^{(k)}(\theta)\in \mathrm{lip}_M\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$,则(1)式右方为 $O_{\delta,f,k}(\frac{1}{n^{k+\alpha}})$.

证明　对于自然数 n,取 $N=[\frac{n-1}{2}]$.从 $f(z)$ 在 Γ上连续可知,$F(\theta)\in C_{2\pi}$.故由三角逼近中的 Jackson定理[3]可知,存在 n次三角多项式:

$$T_N(\theta)=\sum_{-N}^{N}C_k e^{ik\theta}\tag{2}$$

使得

$$\|F(\theta)-T_N(\theta)\|_{[-\pi,\pi]}=O_r[\omega_r(F;\frac{1}{N})]\tag{3}$$

但对于 $z=e^{i\theta}$,有

$$T_N(\theta)=\sum_{-N}^{N}C_k z^k\overset{\mathrm{def}}{=\!=}H_N(z)\tag{4}$$

易见 $H_N(z)$ 在 $0<|z|<\infty$ 中解析.

由(3)式,有

$$\|f(\frac{1}{z})-H_N(z)\|_\Gamma=O_r[\omega_r(F;\frac{1}{N})].\tag{5}$$

记 $J_k(z)$ 是 k阶 Bessel函数[2],

$$J_k(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\theta-z\sin\theta)\,d\theta,\ k\geqslant 0,\tag{6}$$

$O_k(z)$ 是 k阶 Neumann多项式[2],

1997-06-25收稿.

$$O_0(z) = \frac{1}{z},$$

$$O_k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{z}\right)^{k+1}\sum_{g=0}^{[\frac{k}{2}]}\frac{k(k-g-1)!}{g!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2g}, k \geqslant 1. \qquad (7)$$

应用已知公式[2]:当 $|a| = s, |Z| = t\,(t < s)$ 时,均匀地有

$$\frac{1}{a - Z} = J_0(Z)O_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(Z)O_k(a) \qquad (8)$$

任取 $0 < d < 1$.由 Cauchy积分公式,当 $z \in \Gamma$ 时,有

$$H_N(z) = \frac{1}{2ci}\oint_{|Y| = \frac{1}{d^2}}\frac{H_N(Y)}{Y - Z}\mathrm{d}Y - \frac{1}{2ci}\oint_{|Y| = d^2}\frac{H_N(Y)}{Y - Z}\mathrm{d}Y$$

$$= I_1 + I_2.$$

由(8)式,记 $X_k = 1, k > 1, X_0 = \frac{1}{2}$,有

$$I_1 = \sum_0^{\infty} A_k J_k(z),$$

其中 $$A_k = \frac{X_k}{ci}\oint_{|Y| = \frac{1}{d^2}} H_N(Y) O_k(Y)\,\mathrm{d}Y. \qquad (9)$$

$$I_2 = \sum_0^{\infty} B_k O_k(z),$$

其中 $$B_k = \frac{X_k}{ci}\oint_{|Y| = d^2} H_N(Y) J_k(Y)\,\mathrm{d}Y. \qquad (10)$$

从而,当 $z \in \Gamma$ 时,有

$$H_N(z) = \sum_0^{\infty}[A_k J_k(z) + B_k O_k(z)]. \qquad (11)$$

由已知结果[2]:

$$\| J_k \|_{|Y| = r} = O_r\left(\frac{r^k}{2^k k!}\right),$$

$$\| O_r \|_{|Y| = r} = O_r\left(\frac{2^k k!}{r^k}\right). \qquad (12)$$

和(9)、(10)式可知

$$\| A_k \| = O_d(2^k k!\, d^{2k})\| H_N \|_{|Y| = \frac{1}{d^2}}, \qquad (13)$$

$$\| B_k \| = O_d\left(\frac{d^{2k}}{2^k k!}\right)\| H_N \|_{|Y| = d^2}, \qquad (14)$$

从而当 $z \in \Gamma$ 时

$$\| A_k J_k(z) + B_k O_k(z) \|_{\Gamma}$$
$$= O_d(d^{2k})(\| H_N \|_{|Y| = d^2} + \| H_N \|_{|Y| = \frac{1}{d^2}}). \qquad (15)$$

但由(4)知,$H_N(z) = z^{-N}\sum_0^{2N} C_{k-N} z^k$,于是

$$\| H_N \|_{|z| = \frac{1}{d^2}} = d^{2N}\| \sum_0^{2N} C_{k-N} z^k \|_{|z| = \frac{1}{d^2}},$$

由 Bernstein引理[1]知,

$$\| \sum_0^{2N} C_{k-N} z^k \|_{|z| = \frac{1}{d^2}} = \| \sum_0^{2N} C_{k-N} z^k \|_{\Gamma}\frac{1}{d^{4N}} = \| H_N \|_{\Gamma}\frac{1}{d^{4N}}.$$

于是 $$\| H_N \|_{|z| = \frac{1}{d^2}} = \| H_N \|_{\Gamma}\frac{1}{d^{2N}}. \qquad (16)$$

类似地有

$$\| H_N\left(\frac{1}{z}\right) \|_{|z| = \frac{1}{d^2}} = \| H_N\left(\frac{1}{z}\right) \|_{\Gamma}\frac{1}{d^{2N}}.$$

也即

$$\| H_N(z) \|_{|z| = d^2} = \| H_N(z) \|_{\Gamma}\frac{1}{d^{2N}}. \qquad (17)$$

但由(3)、(4)式得到

$$\| H_N \|_{\Gamma} = \| T_N \|_{[-c,c]} = O(\| F \|_{[-c,c]}) = O(\| f \|_{\Gamma}). \qquad (18)$$

结合(15)~(18)式,有

$$\| A_k J_k(z) + B_k O_k(z) \|_{\Gamma} = O_d(\| f \|_{\Gamma})\cdot d^{2k-2N}. \qquad (19)$$

令 $$U_N(z) = \sum_0^{2N}[A_k J_k(z) + B_k O_k(z)]. \qquad (20)$$

故由(11)式,(19)式,得到

$$\| H_N(z) - U_N(z) \|_{\Gamma} \leqslant \sum_{2N+1}^{\infty}\| A_k J_k + B_k O_k \|_{\Gamma}$$
$$= O_d(\| f \|_{\Gamma})\, d^{2N}. \qquad (21)$$

利用循环公式[2]:

$$J_k(z) = \frac{2(k-1)}{z}J_{k-1}(z) - J_{k-2}(z) \quad (k \geqslant 2)$$

和 $J_1(z) = -J'_0(z)$[2] 易知,

$$J_k(z) = \tilde{P}_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)J_0(z) + \tilde{Q}_{k-2}\left(\frac{1}{z}\right)J'_0(z)$$

这里 $\tilde{P}_{k-1}, \tilde{Q}_{k-2}$ 分别为 $k-1, k-2$ 次多项式.再注意 Neumann多项式 $O_k(z)$ 来说,$O_k\left(\frac{1}{z}\right)$ 是 $k+1$ 次多项式,因此和式 $U_N(z)$ 可表示为:

$$U_N(z) = P\left(\frac{1}{z}\right)J_0(z) + Q\left(\frac{1}{z}\right)J_0'(z) + R\left(\frac{1}{z}\right).$$

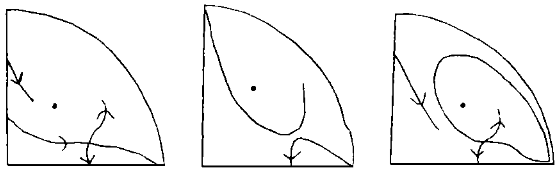
其中 P、Q、R 分别为 $2N-1, 2N-2$ 和 $2N+1$ 次多项式.由(3)式和(21)式且注意 $f\left(\frac{1}{z}\right) = F(\theta)$,有

$$\| f\left(\frac{1}{z}\right) - U_N(z) \|_{\Gamma} = O_r\left[k_r\left(F; \frac{1}{N}\right)\right] + O_d(\| f \|_{\Gamma})\, d^{2N}. \qquad (22)$$

取 $L_n(z) = U_N\left(\frac{1}{z}\right) = P(z)J_0\left(\frac{1}{z}\right) + Q(z)J_0'\left(\frac{1}{z}\right) + R(z)$.从 $N = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ 可知,P、Q、R 都是 $\leqslant n$ 次的多项式.

易见,$\| f(z) - L_n(z) \|_{\Gamma} = \| f\left(\frac{1}{z}\right) - U_N(z) \|_{\Gamma}$.另外,由光滑模的性质[3],可知,$k_r\left(F; \frac{1}{N}\right) = O_r\left[k_r\left(F; \frac{1}{n}\right)\right]$.由此及(22)式,有

(下转第 11页 Continue on page 11)



推论 **3** 若 p为自然数, $q> 1, 0 < T < T_0, U> 0$时,则系统(1)的非鞍奇点的线性部分为中心时必为细焦点.

证 由分界线相图和文献[11]的定理 3即可得.

定理 **10** 若 $p> 0, q> 1, 0 < T < T_0, U> 0$时,则

(i)当 $U(q- 1)> T+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$时,系统(1)有极限环;

(ii)当 $U(q- 1)= T+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$, p为自然数,且 A_1为不稳定细焦点时,系统(1)有极限环;

(iii)当 $T\geqslant U$时,系统(1)无极限环.

证 (i)由定理 4定理 5可导出;

(ii)根据定理 5推论 3即可得;

(iii)由轨线穿过直线 $y= 1- Tx$和水平等倾线的方向得结论 (iii)成立.

参考文献

1 陈兰荪,陈 健. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993, 6~ 16.

2 周建莹等. 生化反应中一类非线性方程的定性分析. 应用数学学报, 1982, 5 (3): 234~ 240.

3 李嘉旭等. 一类多分子反应微分方程模型的定性分析. 生物数学学报, 1990, 5 (2): 160~ 170.

4 蔡燧林等. 一类生化反应方程的分支. 高校应用数学学报, 1991, 6 (1): 145~ 157.

5 张伟年. 一类多分子反应微分方程模型的闭轨的存在性. 应用数学与力学, 1993, 14 (6): 559~ 566.

6 朴仲铉,姚 波. 一类多分子反应模型的极限环的研究. 生物数学学报, 1994, 9 (5): 147~ 154.

7 Tang Yanbin. A hopf bifurcation solution for a multi-molecules reaction model. 数学杂志, 1996, 16 (2): 143~ 150.

8 黄文灶,张纯彦. 一类非线性方程的定性分析. 系统科学与数学, 1996, 16 (2): 172~ 180.

9 何永葱,陈永跃. 一类多分子反应微分方程模型的相图. 生物数学学报, 1994, 9 (5): 137~ 143.

10 张芷芬等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985, 131~ 132, 152~ 153.

11 Perk L M. On the accumulation of limit cycles, Proc Amer Math Soci, 1987, 99: 515~ 526.

(责任编辑: 邓大玉 黎贞崇)

(上接第 7页 Continue from page 7)

$$\| f(z) - L_n(z)\|_\Gamma = O_r[\omega_r(F; \frac{1}{n})] + O_d(\| f\|_\Gamma d^n),$$

其中 $L_n(z)$即为定理中欲求的函数.

定理证毕.

若又知 $F^{(k)}(\theta)\in \mathrm{lip}_M T(0 < T\leqslant 1)$,在(1)式中,取 $r= k+ 1$. 由光滑模的性质[3]知,

$$\omega_{k+1}(F; \frac{1}{n})\leqslant \frac{1}{n^k}\omega(F^{(k)}; \frac{1}{n})\leqslant M\frac{1}{n^{k+T}}$$

由此即得

$$\| f - L_n\|_\Gamma = O_{d,f,k}(\frac{1}{n^{k+T}}).$$

参考文献

1 Gaier D. Vorlesungen über approximation im komplexen. Birkhauser, 1980.

2 Whittaker E T, Watson G. Modern analysis. Cambridge Univ Press, 1947.

3 Lorentz G. Approximation of Functions (中译本). 谢庭藩,施咸亮译. 上海: 上海科技出版社, 1966.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)