DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 1998, 5 (1): 12~ 14

一类二阶非线性系统的周期解
On Periodic Solutions for Some Non- linear Second Order Differential Equations

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math. and Computer Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要 应用构造 Liapunov 函数的方法，在限制条件较弱的情形下，研究了一类非线性系统周期解的存在性.
关键词 非线性系统 Liapunov 函数 周期解 存在性
Abstract The existence of periodic solutions for some non- linear second differential system under weaker conditions is discussed by using the method of Liapunov function.
Key words non- linear differential system, Liapunov function, periodic solution, existence
中图法分类号 O 175.24

在工程技术中经常出现二阶非线性周期系统.本文考虑下述非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{h}(y) - f(x,y) + p(t) \\ \dot{y} = h(x,y) - g(x) + q(t) \end{cases} \quad (1)$$

周期解的存在性.假设系统(1)中所出现的函数均连续且满足解的存在唯一性条件, $p(t)$, $q(t)$ 均为 t 的 k 周期函数.特殊地,当 $h(x,y) = 0$, $p(t) = 0$, $f(x,y) = f(x)$ 时,文献[1]在 $g'(x) > 0$, $|x| \leqslant |g(x)|$, $f'(x) > 0$,当 $|x| \geqslant a > 0$, $k' \leqslant \frac{\mathrm{h}(y)}{y} \leqslant k$ $(y \neq 0, 0 < k' < k < 2k')$ 的限制条件下应用构造闭曲线围成的有界域,限制系统的解在有界域内的定性方法,研究了系统周期解的存在性.本文应用构造 Liapunov 函数的方法,在限制条件较弱的情形下,研究了系统(1)周期解的存在性.不仅把文献[1]研究的系统推广到更一般的情形,而且证明也很简洁,文献[2]可以作为本文的特例.

记 $\mathrm{H}(y) = \int_0^y \mathrm{h}(u)\,\mathrm{d}u$, $G(x) = \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u$, $\_ = \max\{\bar{p}, \bar{q}\}$,其中 $\bar{p} = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant k} |p(t)|$, $\bar{q} = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant k} |q(t)|$.

为着证明的方便,我们先叙述下述定理.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,x,y) \end{cases} \quad (2)$$

这里 $f(t,x,y) \in C(I \times R^2, R)$, $g(t,x,y) \in C(I \times R^2, R)$.

定理 1 假设存在定义在 $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $|x| + |y| > K$ 上的 Liapunov 函数 $V(t,x,y)$,这里 K 可能是很大的,它满足下述条件

(i) $V(t,x,y)$ 当 $|y| \to \infty$ 时对 (t,x) 一致趋于无穷大;

(ii) $V(t,x,y) \leqslant b(|x|, |y|)$,这里 $b(r,s)$ 是连续的;

(iii) $\dot{V}_{(2)}(t,x,y) \leqslant 0$;

并设对应于每个 $M > 0$,存在定义在 $0 \leqslant t \leqslant \infty$, $|x| \geqslant K_1(M)$, $|y| \leqslant M$ 上的 Liapunov 函数 $W(t,x,y)$,这里 K_1 可能是很大的,它满足条件

(iv) $W(t,x,y)$ 当 $|x| \to \infty$ 时对 (t,y) 一致趋于无穷大;

(v) $W(t,x,y) \leqslant c(|x|)$,这里 $c(r)$ 是连续的;

(vi) $\dot{W}_{(2)}(t,x,y) \leqslant 0$.

则系统(2)的解是一致有界的.如果(2)是 k 周期系统,则系统(2)存在 k 周期解.

证明 见文献[3]定理 8.9 及推论 15.1.

现在假设下述条件成立

(I) 存在连续函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 使对任意的 y 有 $f_1(x) \leqslant f(x,y) \leqslant f_2(x)$,且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$,

1997-06-25收稿.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=-\infty$.

(II) 存在常数 $L>0$ 使 $|x|>L$ 时有 $xg(x)>0, xf_1(x)>0$.

(III) 存在常数 $N>0$,使 $|y|>N$ 时对任意的 x 有 $|h(x,y)|\geqslant \_$,且 $|y|\leqslant|\mathrm{h}(y)|$.对 $y\neq 0$ 有 $yh(x,y)<0$ 对任意的 x 成立,且 $\mathrm{H}(y)=\int_0^y \mathrm{h}(u)\,du>0$.

定理 2 假设条件 (I)、(II)、(III) 成立,则系统 (1) 存在 k周期解.

证明 由条件 (I),可以选取一个适当的正数 A(无妨设 $A>L$),再选取一个正数 $B(B^2>4(1+\_)A$ 且 $B>N)$,使得当 $x>A$ 且 $|y|\leqslant B$ 时有 $\{f(x,y)-[\_+\overline{A(1+\_)}]\}g(x)\geqslant \_|\mathrm{h}(y)|+\_\overline{A(1+\_)}$.这是因为当 $x>A$ 时,由条件 (II) 知 $g(x)>0, f(x,y)>f_1(x)>0$,注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$,因此只要 A 取得适当大,必有 $f(x,y)>\_+\overline{A(1+\_)}$ 且 $f(x,y)g(x)$ 可以足够大.此时 $|y|\leqslant B$,则 $|\mathrm{h}(y)|$ 有界.因此当 $x>A$, $|y|\leqslant B$ 时,不等式 $\{f(x,y)-[\_+\overline{A(1+\_)}]\}g(x)\geqslant \_|\mathrm{h}(y)|+\_\overline{A(1+\_)}$ 可以满足.而当 $x<-A$ 时,由 $xg(x)>0$ 知 $g(x)<0$,又由于 $f(x,y)\leqslant f_2(x)$,而 $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=-\infty$,故知对上述适当大的 A 有 $f(x,y)<0$ 且 $f(x,y)g(x)$ 足够大,对 $|y|\leqslant B$ 能保证不等式 $\{f(x,y)-[\_+\overline{A(1+\_)}]\}g(x)\geqslant \_|\mathrm{h}(y)|+\_\overline{A(1+\_)}$ 成立.而当 $|x|\leqslant A$ 时,由 $f_1(x)\leqslant f(x,y)\leqslant f_2(x)$.知 $f(x,y)$ 有界,$g(x)$ 也有界.因此只要常数 B 选得适当,不等式 $\_|g(x)|+|g(x)f(x,y)|+(1+\_)|f(x,y)|+\_(1+\_)<B$ 能满足.现在考虑函数 $U(t,x,y)=\mathrm{H}(y)+G(x)$,再定义

$$V(t,x,y)=\begin{cases} U(t,x,y) & (x\geqslant A, |y|<+\infty) \\ U(t,x,y)-(1+\_)(x-A) & (|x|\leqslant A, y\geqslant B) \\ U(t,x,y)+2A(1+\_) & (x\leqslant -A, y\geqslant B) \\ U(t,x,y)+\dfrac{2A(1+\_)}{B}y & (x\leqslant -A, 0\leqslant y\leqslant B) \\ U(t,x,y)-\dfrac{2A(1+\_)}{B}y & (x\leqslant -A, -B\leqslant y\leqslant 0) \\ U(t,x,y)-2A(1+\_) & (x\leqslant -A, y\leqslant -B) \\ U(t,x,y)+(1+\_)(x-A) & (|x|\leqslant A, y\leqslant -B) \end{cases}$$

由正数 A,B 的选取可知,当 $|x|>A$ 时 $G(x)>0$,而当 $B\leqslant|y|\leqslant|\mathrm{h}(y)|$ 时,由 $B^2>4(1+\_)A$ 知 $\mathrm{H}(y)=\int_0^y \mathrm{h}(u)\,du\geqslant \frac{1}{2}B^2>2(1+\_)A$,易见 $\mathrm{H}(y)\to+\infty$ ($|y|\to\infty$),因而 $V(t,x,y)$ 满足定理 1中的条件 (i),(ii).我们指出,条件 (iii) 也满足,这是因为

1) 当 $x\geqslant A, |y|<+\infty$ 时

$\dot V_{(1)}(t,x,y)=\mathrm{h}(y)[h(x,y)-g(x)+q(t)]+g(x)[\mathrm{h}(y)-f(x,y)+p(t)]=\mathrm{h}(y)h(x,y)+\mathrm{h}(y)q(t)-f(x,y)g(x)+g(x)p(t)$

考虑两种情形:当 $x\geqslant A, B\leqslant|y|<+\infty$ 时由条件 (III) 知 $yh(x,y)<0$ 故 y 与 $h(x,y)$ 异号,又由 $\mathrm{H}(y)>0$ 知 y 与 $\mathrm{h}(y)$ 同号,从而 $\mathrm{h}(y)h(x,y)<0$,又注意到 $B\leqslant|y|$ 时,$|h(x,y)|\geqslant\_$,从而 $|\mathrm{h}(y)h(x,y)|\geqslant\_|\mathrm{h}(y)|$,即 $\mathrm{h}(y)h(x,y)+\_|\mathrm{h}(y)|\leqslant 0$,因此

$\dot V_{(1)}(t,x,y)\leqslant -f(x,y)g(x)+\_g(x)<0$.

而当 $x\geqslant A, |y|\leqslant B$ 时,由上述讨论,$|\mathrm{h}(y)|$ 有界,$f(x,y)g(x)$ 足够大,$\mathrm{h}(y)h(x,y)<0$,明显地也有 $\dot V_{(1)}(t,x,y)\leqslant \mathrm{h}(y)h(x,y)+\_|\mathrm{h}(y)|-f(x,y)g(x)+\_g(x)<0$.

2) 当 $|x|\leqslant A, y\geqslant B$ 时,注意到 $y\leqslant \mathrm{h}(y)$,故有 $\dot V_{(1)}(t,x,y)=\mathrm{h}(y)h(x,y)+\mathrm{h}(y)q(t)-f(x,y)g(x)+g(x)p(t)-(1+\_)[\mathrm{h}(y)-f(x,y)+p(t)]\leqslant \mathrm{h}(y)h(x,y)+\_\mathrm{h}(y)-f(x,y)g(x)+\_|g(x)|-\mathrm{h}(y)-\_\mathrm{h}(y)+(1+\_)|f(x,y)|+(1+\_)\_\leqslant -f(x,y)g(x)+\_|g(x)|+(1+\_)|f(x,y)|+\_(1+\_)-B<0$.

3) 当 $x\leqslant -A, y\geqslant B$ 时,由上述讨论知 $\mathrm{h}(y)h(x,y)\leqslant -\_\mathrm{h}(y)$,而 $f(x,y)g(x)$ 足够大,因此

$\dot V_{(1)}(t,x,y)=\mathrm{h}(y)h(x,y)+\mathrm{h}(y)q(t)-f(x,y)g(x)+g(x)p(t)\leqslant \mathrm{h}(y)h(x,y)+\_\mathrm{h}(y)-f(x,y)g(x)+\_|g(x)|<0$.

4) 当 $x\leqslant -A, 0\leqslant y\leqslant B$ 时,我们有

$\dot V_{(1)}(t,x,y)=\mathrm{h}(y)h(x,y)+\mathrm{h}(y)q(t)-g(x)f(x,y)+g(x)p(t)+\frac{2A(1+\_)}{B}[h(x,y)-g(x)+q(t)]=[\mathrm{h}(y)+\frac{2A(1+\_)}{B}]h(x,y)+\mathrm{h}(y)q(t)-g(x)f(x,y)-\frac{2A(1+\_)}{B}g(x)+g(x)p(t)+\frac{2A(1+\_)}{B}q(t)$

注意到 $0\leqslant y\leqslant B$ 时,$\mathrm{h}(y)\geqslant 0$ 而 $h(x,y)\leqslant 0$ 故知 $[\mathrm{h}(y)+\frac{2A(1+\_)}{B}]h(x,y)\leqslant 0$,又由 $B^2>4(1+\_)A$ 知 $B>2\overline{A(1+\_)}$,从而有

$\dot V_{(1)}(t,x,y)\leqslant \mathrm{h}(y)q(t)-g(x)f(x,y)+\frac{2A(1+\_)}{B}|g(x)|+\_|g(x)|+\frac{2A(1+\_)}{B}\leqslant \_\mathrm{h}(y)+\_\overline{A(1+\_)}-g(x)f(x,y)+[\_+\overline{A(1+\_)}]|g(x)|\leqslant 0$.

5) 当 $x\leqslant -A, -B\leqslant y\leqslant 0$ 时与情形 4的讨论

相同也有 $\dot{V}_{(1)}(t,x,y)\leqslant 0$.

6) 当 $x\leqslant -A, y\leqslant -B$ 时与情形 3的讨论相同也有 $\dot{V}_{(1)}(t,x,y)\leqslant 0$.

7) 当 $|x|\leqslant A, y\leqslant -B$ 时与情形 2的讨论相同也有 $\dot{V}_{(1)}(t,x,y)\leqslant 0$.

故定理 1的条件 (iii) 满足 .对适当的 K_1,选取对于 $|x|\geqslant K_1(M)$ 和 $|y|\leqslant M$ 有定义的 $W(t,x,y)=|x|$,易见 $W(t,x,y)$ 满足定理 1的条件 (iv)和 (v).事实上,条件 (iv) 也满足 .因为 $|y|\leqslant M$ 时, $h(y)$ 有限,而 $f_1(x)\leqslant f(x,y)\leqslant f_2(x)$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=-\infty$,因此只要 K_1 取得适当大,当 $x\geqslant K_1$ 时有 $\dot{W}_{(1)}(t,x,y)=\dot{x}=h(y)-f(x,y)+p(t)<0$,当 $x\leqslant -K_1$ 时 , $\dot{W}_{(1)}(t,x,y)=-\dot{x}=-h(y)+f(x,y)-p(t)<0$ 也成立.注意到系统 (1)是 k周期系统 ,利用定理 1即知系统 (1) 存在 k周期解 .

例　考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}=y^3+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)y+\frac{\sqrt{3}}{8}\cos y \\ \quad -x^5+\sin xy+\sin t \\ \dot{y}=-y^3-y\cos^2 x-x-xe^{-x^2}+\cos t \end{cases} \tag{3}$$

这里 $h(y)=y^3+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)y+\frac{\sqrt{3}}{8}\cos y$, $H(y)=\frac{1}{4}y^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)y^2+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin y>0\ (y\neq 0)$ 且 $H(y)\to\infty\ (|y|\to\infty)$, $h(x,y)=-y^3-y\cos^2 x$ 满足 $yh(x,y)=-y^4-y^2\cos^2 x\leqslant 0$ 且当 $|y|\geqslant 1$ 时 $|h(x,y)|\geqslant 1=$ _ , $f(x,y)=x^5-\sin xy$, 易见 $f_1(x)=x^5-1\leqslant f(x,y)\leqslant x^5+1=f_2(x)$, $g(x)=x+xe^{-x^2}$ 满足 $xg(x)=x^2+x^2e^{-x^2}>0$.由定理 1可知系统 (3) 存在 2c周期解 . 我们指出 , 文献 [1, 2] 的方法均不能判定系统 (3) 周期解的存在性 .

参考文献

1 井竹君 . 一个非自治二阶微分方程周期解的存在性 . 数学学报 , 1982, 25 (4): 403~ 409.

2 林木元等 . 一类非自治二阶微分方程的周期解 . 广西师范大学学报 , 1996, 14 (3): 21~ 23.

3 Yoshizawa T著 . 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性 . 郑祖庥等译 . 南宁: 广西人民出版社 , 1985. 58~ 64, 146~ 155.

4 Sansone G, Conti R著 . 非线性微分方程 . 黄启昌等译 . 北京: 科学出版社 , 1983. 394~ 406.

(责任编辑: 蒋汉明　黎贞崇)

1997年国家自然科学奖获一等奖和二等奖项目

一等奖

哈密顿系统的辛几何算法 (主要完成单位: 中科院计算数学与科学计算研究所)

二等奖

锑、铕、铈的国际原子量新标准 (主要完成单位: 北京大学、 国家标准物质研究中心)

一些高张力分子的合成化学 (主要完成单位: 香港中文大学、 中科院上海有机化学所)

元素同位素质谱测定新方法及其应用研究 (主要完成单位: 中科院青海盐湖研究所)

煤成油的形成环境和成烃机理 (主要完成单位: 中国石油勘探开发研究院、 石油大学 (北京) 等)

DNA分子的结构、动力学和序列的理论研究 (主要完成单位: 天津大学)

视觉复杂图像信息的传递和图像特征整合 (主要完成单位: 中科院上海生理所)

小麦花粉无性系变异机制与配子类型的重组与表达规律 (主要完成单位: 中科院遗传所)

几何定理机器证明理论与算法的新进展 (主要完成单位: 中科院成都计算机应用所、 中科院系统科学研究所)

(摘自 中国科学院《科学发展报告》, 1997)