DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.02.017
广西科学 Guangxi Sciences 1998, 5 (2): 132~134

以曲面为顶的 CAD实体体积计算
Calculation of the Entity Volume on CAD Which Top is Curved Surface

王 勇 白晓清
Wang Yong Bai Xiaoqing
(广西大学计算机与信息工程学院 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(College of Comp. and Info. Engi., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 根据多重积分理论,用 Shepard曲面和加权最小二乘曲面来实现三维空间散乱数据点所围成的曲顶实体体积的计算.
关键词 曲顶实体 CAD 体积
中图法分类号 TP 317

Abstract In terms of multiple integral theory, Shepard curved surface and weight least square curved surface were used to perfom the calculation of volume of the entity with a curved surface top on CAD from scattered points in three-dimensional space.
Key words entity with a curved surface top, CAD, volume

由于众多的工程问题需要计算以曲面为顶的 CAD实体体积,如工程投标需要计算所挖的土方量,则必须首先要知道所挖土方的体积;核子称测量传送的物体重量,则必须首先要知道传送的物体的体积;GIS中某种地形地貌的体积大小的计算等.本文仅利用所给的空间散乱数据点便可近似计算该实体的体积.

文献 [7]提出作为解析曲线曲面的子集,隐式形式提供了足够的灵活性使其几乎可以拟合任何复杂形状的曲线和曲面. Abhyankar和 Bajaj[4,5]研究了二次三次和一般次数平面曲线的参数化以及一般次数空间曲线的参数化问题, Royappa[8]则研究在有限精度下如何实现参数化的问题.但隐式曲线和曲面的求解算法相对复杂,难以在计算机上实现.本文利用所给的空间散乱数据点通过[1,2]拟合技术,在计算机上实现曲线和曲面.最后实现实体的体积的计算.

1 曲面的拟合技术

在数值逼近论及计算几何中,曲面的拟合技术有两类:曲面的插值和曲面的逼近.曲面的插值如 Shepard曲面.曲面的逼近如加权最小二乘曲面[1,2].

1998-02-14收稿, 1998-02-25修回.

1.1 Shepard曲面的表达式

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i)^{-1}\cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n}(d_i)^{-1}} & \text{当 } d_i\neq 0;\\ T_i & \text{当 } d_i=0;\end{cases}$$

其中 $d_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$,

这是一个关于 (x_i,y_i,f_i) $(i=1,2,\cdots,n)$的全局插值公式.

1.2 加权最小二乘曲面的表达式

$$f(x,y)=R_1+R_2X+R_3Y+R_4XY+R_5X^2+R_6Y^2$$

其中 R_i $(i=1,2,\cdots,6)$为待定系数.

由于空间原始数据点的可靠性和影响力不一致,为权衡轻重可引入全函数 $W_k(X,Y)$,当 (X,Y)接近点 (X_k,Y_k)时,权函数的值就变大,当远离 (X_k,Y_k)时,权函数的值 $W_k(X,Y)$就变小,取权函数为

$$W_k(X,Y)=[(X-X_k)^2+(Y-Y_k)^2+0.125]^2$$

求 R_i $(i=1,2,\cdots,6)$的值,可通过 $\frac{\partial H}{\partial R_i}=0$ $(i=1,2,\cdots,6)$,可解出 R_i $(i=1,2,\cdots,6)$,其中

$$H(R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6)=\sum_{k=1}^{6}W_k[f_{ij}(x_k,y_k)-$$

$f_k]^2 = \min$

2 多重积分理论

在多重积分理论里[3],有下面三个定理:

定理 1 有界区域 D 上的连续函数必可积.

定理 2 设 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D[a,b;c,d]$ 上可积,且对每一个 $x \in [a,b]$,积分 $\int_c^d f(x,y)\,dy$ 存在,则累次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ 也存在,且

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

定理 3 令 $f(x) \in C^4[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\text{ª}) \quad 其中\ a < \text{ª} < b \qquad (1)$$

3 曲面 CAD 实体体积计算式的推导

由定理 3,得到 Simpson 近似计算式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (2)$$

式(2)对于次数不超过 3 次的一切多项式是精确的.式(1)可推广成复合形式,本文在此不作叙述.

有了式(2),近似计算重积分的 Simpson 公式.

即:令 R 为矩形域 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$,取 $m = \frac{1}{2}(a+b), n = \frac{1}{2}(c+d), h = b-a, k = d-c, h = b-a, k = d-c$,则用两个 Simpson 近似式计算 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ 的结果如下:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{kh}{36}\{f(a,b) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) + 4[f(a,n) + f(m,c) + f(b,n)f(m,d)] + 16f(m,n)\} \qquad (3)$$

其中 $f(x,y)$ 为本文所介绍的拟合函数.因此 $f(x,y)$ 是连续的.

式(3)的推导过程如下:

由于 $f(x,y)$ 是连续的,因此 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ 可积.

而且函数 $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ 连续,故 $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ 存在,

则 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$.

由 Simpson 近似式

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \approx$$

$$\int_a^b \left[\frac{k}{6} f(x,c) + 4f(x,n) + f(x,d)\right] dx \approx \frac{kh}{36}\{f(a,c) + 4F(m,c) + f(b,c) + 4[f(a,n) + 4f(m,n) + f(b,n)] + f(a,d) + 4f(m,d) + f(b,d)\}$$

表 1 36个型值点与函数值比较

Table 1 Comparision of 36 offset points and functional values

点数 No.	X	Y	Z	点数 No.	X	Y	Z
1	0.7055	0.5334	0.3403	2	0.5795	0.2896	0.5063
3	0.3019	0.7747	0.2178	4	0.0140	0.7607	0.3343
5	0.8145	0.7090	0.1149	6	0.0454	0.4140	0.6380
7	0.8626	0.7905	0.0758	8	0.3735	0.9620	0.1851
9	0.8714	0.0562	0.2193	10	0.9496	0.3640	0.3461
11	0.5249	0.7671	0.0603	12	0.0535	0.5925	0.4070
13	0.4687	0.2982	0.5632	14	0.6227	0.6478	0.1939
15	0.2638	0.2793	1.0985	16	0.8298	0.8246	0.0783
17	0.5892	0.9861	0.1232	18	0.9110	0.2269	0.3760
19	0.6951	0.9800	0.0960	20	0.2439	0.5339	0.4453
21	0.1064	0.9994	0.2553	22	0.6762	0.0157	0.2976
23	0.5752	0.1001	0.4015	24	0.1030	0.7989	0.3072
25	0.2845	0.0456	0.8723	26	0.2958	0.3820	0.7711
27	0.3010	0.9486	0.2147	28	0.9798	0.4014	0.2653
29	0.2783	0.1604	10.1103	30	0.1628	0.64466	0.3532
31	0.4101	0.4128	0.5032	32	0.7127	0.3262	0.6279
33	0.6332	0.2076	0.4874	34	0.1860	0.5834	0.3991
35	0.0807	0.4580	0.5851	36	0.9057	0.2614	0.4203

表 2 给定网格上 23个点的值与函数值比较

Table 2 Camparision of 23 point values and functional values in the given grid

点数 No.	X	Y	精确值 Z	近似值 FF	误差 ERR
1	0.0140	0.0157	0.7835	0.9193	0.1359
2	0.2555	0.0157	0.8453	0.8770	0.0317
3	0.4969	0.0157	0.4449	0.3997	0.0452
4	0.7384	0.0157	0.2672	0.2974	0.0302
5	0.9798	0.0157	0.1219	0.2505	0.1286
6	0.0140	0.2616	0.8247	0.7259	0.0987
7	0.2555	0.2616	1.1419	1.0910	0.0509
8	0.4969	0.2616	0.5399	0.5474	0.0074
9	0.7384	0.2616	0.6026	0.5742	0.0284
10	0.9798	0.2616	0.2721	0.3670	0.0949
11	0.0140	0.5076	0.4788	0.5294	0.0507
12	0.2555	0.5076	0.4862	0.4605	0.0258
13	0.4969	0.5076	0.3189	0.4359	0.1171
14	0.7384	0.5076	0.3931	0.3450	0.0480
15	0.9798	0.5076	0.1784	0.2405	0.0621
16	0.0140	0.7535	0.3367	0.3344	0.0023
17	0.2555	0.7535	0.2677	0.2372	0.0305
18	0.4969	0.7535	0.0378	0.0661	0.0283
19	0.7384	0.7535	0.1179	0.1185	0.0006
20	0.9798	0.7535	0.0543	0.0848	0.0305
21	0.014	0.9994	0.2690	0.2645	0.0045
22	0.2555	0.9994	0.2209	0.2197	0.0012
23	0.4969	0.9994	0.1468	0.1437	0.0032

整理可得式(3).

4 实例

用 Shepard插值方法编制的 C语言程序已在微机上运行通过.

例: $f(x,y)=0.75\exp[-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2]+0.75\exp[-(9x+1)^2/49-(9y+1)/10]+0.5\exp[-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2]-0.2\exp[-(9x-4)^2-(9y-7)^2]$

方法: 从给定函数上随机取36个型值点,然后利用 Shepard方法计算给定网格上 23个点的值,并与函数值进行比较,具体见表1,表2.

5 结语

一般来说,曲线和曲面的拟合通过参数化的隐式形式来表示,通过参数的消去,参数形式是隐式的特例.隐式形式不仅有紧凑的表达形式而且具有几何运算下的封闭性.任何参数形式或隐式形式的曲线曲面之间的几何运算(求和、求差或交以及偏移(offset))的结果均可表成隐式形式.本文避开隐式形式的复杂性,用 Shepard曲面和加权最小二乘曲面来实现三维空间散乱数据点所围成的曲顶实体体积的计算.

参考文献

1 苏步青,刘鼎元著. 计算几何. 上海: 上海科技出版社, 1992.

2 李岳生,黄友谦编. 数值逼近.北京: 人民教育出版社, 1991.

3 复旦大学数学系编. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1991.

4 Bajaj C, Xu G. Piecewise rational approximations of real agebraic curves, J Comp Math, 1997, 15 (1): 55~ 71.

5 BaBaj C, Xu G. Regular algebraic curve segments (III) - Applications in dada fitting, Research Report ICM-96-10, Institute of Computational Mathematics, Chinese Academy of Sciences, 1996.

6 徐国良. CAGD中的隐式曲线与曲面. 数值计算与计算机应用, 1997, 2.

(责任编辑: 黎贞崇 蒋汉明)

(上接第13页 Continue from page 131)

78, 80, 82, 83, 84, 86, 89, 93, 95, 98, 100, 101, 102, 104, 109, 112, 113, 117, 121, 126, 130, 134}.

2) 给定素数 $p_2=307$ 与参数集合

$S_2=\{1, 5, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 27, 30, 33, 35, 37, 42, 46, 47, 52, 53, 55, 64, 69, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 85, 86, 90, 93, 96, 97, 98, 100, 104, 114, 118, 119, 122, 126, 128, 131, 139, 140, 142, 143, 149, 152\}$.

3) 给定素数 $p_3=421$ 与参数集合

$S_3=\{1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, 24, 26, 27, 29, 32, 34, 35, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 58, 59, 65, 67, 68, 70, 75, 76, 80, 82, 83, 86, 87, 88, 91, 92, 97, 99, 103, 109, 113, 119, 125, 129, 132, 133, 134, 137, 142, 144, 145, 146, 148, 151, 152, 154, 162, 164, 165, 169, 173, 181, 184, 188, 197, 198, 201, 203, 206, 207\}$.

我们在计算机上验证了:如前定义的素数阶循环图 $G_{271}(S_1)$ 中既不含 6点团 K_6,也不含 15独立点集 $\bar{K}_{15}$;素数阶循环图 $G_{307}(S_2)$ 中既不含 6点团 $\bar{K}_6$,也不含 16独立点集 $\bar{K}_{16}$;素数阶循环图 $G_{421}(S_3)$ 中既不含 6点团 $\bar{K}_6$,也不含 17独立点集 $\bar{K}_{17}$. 由于这些结论并据 Ramsey定理,我们就证明了

定理1 $R(6,15)\geqslant 272, R(6,16)\geqslant 308, R(6,17)\geqslant 422$.

上述第三个结果超过了目前已知的最好结果 $R(6,17)\geqslant 420$[4],其他2个结果填补了文献[5]中的有关 Ramsey数下界的两个空白.

参考文献

1 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey's theorem. Ph D thesis, University of Waterloo, January, 1996.

2 Exoo G. Announcement: On the Ramsey numbers $R(4,6)$, $R(5,6)$ and $R(3,12)$. Ars Combinatoria, 1993, 35: 85.

3 Kalbfleisch J G. Construction of special Edge-Chromatic Graphs. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, 8: 575~ 584.

4 罗海鹏,苏文龙. Ramsey数 $R(6,n)$ 的两个下界. 计算机应用研究, 1997, (6): 27~ 28.

5 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics 1 (1994), DS1: 1~ 17. Revision # 4 July 16. 1997.

6 苏文龙,罗海鹏,李乔. 经典 Ramsey数 $R(4,12)$、$R(5,11)$ 和 $R(5,12)$ 的新下界. 科学通报, 1997, 42 (22): 2460.

7 苏文龙,罗海鹏,吴康. 经典 Ramsey数 $R(5,12)$、$R(5,13)$、$R(5,14)$ 和 $R(5,15)$ 的新下界. 广西大学学报, 1997, 22 (4): 298~ 299.

8 罗海鹏,苏文龙. Ramsey数 $R(6,n)$ 的两个下界. 广西科学, 1997, 4 (3): 183~ 185.

(责任编辑: 黎贞崇)