DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.1998.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 1998，5（3）：177～180

相互偶合作用下混沌系统的同步 *
The Synchronization of Chaos Systems under Mutual Couple

陈光旨　　李　伟
Cheng Guangzhi　　Li　Wei

（广西大学物理系　南宁市西乡塘路 10 号　530004）
（Dept. of Physics，Guangxi Univ.，10 Xixiangtanglu，Nanning，Guangxi，530004）

摘要　通过对混沌系统的驱动变量进行相互偶合，使不同初值下的混沌系统达到同步。同步过程不改变原系统的混沌性质。在一定的偶合强度 k_2 下，对 Lorenz 混沌系统进行了数值实验，结果在 $k_2>2$ 的情况下，系统都达到了同步。这一偶合强度明显小于主动-被动同步方法中的偶合强度。最后，我们对主动-被动同步方法、连续反馈同步方法及相互偶合变量同步方法进行了比较，发现在一定的条件下，三种同步方法具有等价的关系。
关键词　混沌　混沌同步　相互偶合
中图法分类号　O 414

Abstract　Through mutual couple of the drive variables of the chaos systems，we make two chaos systems which have different initial value become synchronization．This process will not alter the character of the chaos system．Under certain strength of couple k_2，we make same numerical value experiment to Lorenz chaos system．The results show that if only $k_2>2$，the systems become synchronization．This strength of couple is obviously less than initiative-passive method's．At the end of the paper，we compare three methods of synchronization．It is found that they are equivalence under certain conditions．
Key words　chaos，chaos synchronization，mutual couple

自然界中存在着大量的同步现象，混沌同步现象就是其中之一。90 年代初，Pecora 和 Carrol 在电子线路中实现了两个系统的混沌同步，提出了驱动-响应同步方案[1～3]，该方案的特点是由驱动系统与响应系统通过驱动变量构成总体动力学体系，响应系统的行为取决于驱动系统，而驱动系统的行为与响应系统的行为无关。通过将驱动系统分解为真正用于驱动响应系统和不用于驱动响应系统的两部分，再将后者复制一个响应系统，只有当响应系统的所有条件 Lyapunov 指数都为负值时，响应系统才能与驱动系统的混沌达到同步。可见 Pecora-Carrod 的驱动-响应同步方法是一种变量替换方法，这一方法的关键是要对系统进行特定的分解，但在实际应用中，这种特定的分解常常受到限制，有时甚至无法进行分解。Kocarev 和 Parlite 提出的主动-被动分解法[4]是对驱动-响应方法的改进，该法采取了非常灵活的普适分解方法。与驱动-响应方法中对响应系统的一些变量作完全替代不同，被动系统的变量或其函数只是部分被替换，因此更实用于混沌同步，特别是有利于利用混沌同步进行保密通讯等应用目的。与驱动-响应同步方法一样，主动-被动方法中，被动系统的行为取决于主动系统，而主动系统的行为与被动系统的行为无关。但在现实世界中，除了驱动-响应，主动-被动这些单方向作用下的同步情况外，更多的是系统间相互作用所达到的同步[5～12]，在这种情况下，就分不清谁是主动，谁是被动，谁为驱动，谁为响应。针对这一情况，我们对混沌系统变量进行了相互偶合，并在一定的偶合强度下实现了混沌系统间的同步。最后，我们发现在一定的条件下，主动-被动方法作为特例被包含相互偶合同步方法中。对这一方法与主动-被动方法及连续反馈法[13]进行比较，我们发现在一定条件下，三种方法等价。

1　原理与方法

设我们研究的动力学系统为

1998-01-25 收稿。
* 国家自然科学基金资助项目(编号：19562001)。

$$\dot{z} = F(z) \tag{1.1}$$

我们总可以把系统(1.1)改写为非自治系统的形式

$$\dot{x}_1 = f(x_1, s(t)) \tag{1.2}$$

其中 $s(t)$ 为所选的某变量或变量的函数,即

$$s(t) = h(x_1) \tag{1.3}$$

现在我们产生(1.2)的复制系统

$$\dot{x}_2 = f(x_2, s(t)) \tag{1.4}$$

为了引入相互偶合项,与直接将 $s(t)$ 作为驱动项不同,我们将 $s(t) = h(x_1)$ 分为两部分

$$h(x_1) = h_1(x_1) + h_2(x_1) \tag{1.5}$$

然后将上式中第二项作替代 $h_2(x_2) \to h_2(x_1)$,记

$$s_1(t) = h_1(x_1) + h_2(x_2) \tag{1.6}$$

从上式中可以看出,仅仅右边第二项才是驱动项,将(1.6)带回(1.2),得到

$$\dot{x}_1 = f(x_1, s_1(t)) \tag{1.7}$$

同样,对复制系统(1.4)进行完全相同的处理,即可得到

$$\dot{x}_2 = f(x_2, s_2(t)) \tag{1.8}$$

注意,(1.7)与(1.8)是两个完全对称的系统。它们互相驱动,驱动信号分别为 $h_2(x_2)$ 和 $h_2(x_1)$。因为 $s(t)$ 的选取和 $h(x)$ 的分割(1.5)都具有很大的灵活性,这有利于适当选取合适的 $h_2(x_2)$ 和 $h_2(x_1)$,从而实现两系统间的同步。由方程(1.7)及(1.8)可导出两系统变量差 $\delta x = x_1 - x_2$ 的方程

$$\delta\dot{x} = f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2) = Z\,\delta x \tag{1.9}$$

其中 Z 是一个矩阵, 通过求它的本征值方程或通过(1.9)求偶合系统的条件 Lyapunov 指数, 期望对于适当选择的 $h_2(x_2)$ 和 $h_2(x_1)$,可以使得(1.9)在 $\delta x = 0$ 处有一个稳定的不动点,即从不同初值出发的系统(1.7)及(1.8)之间存在一个稳定的同步态 $x_1 = x_2$,一旦达到同步态,有 $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$,这时(1.7)和(1.8)都还原为系统(1.1)。因此同步过程对系统(1.1)的混沌特性没有影响, 虽然在同步条件下, 系统(1.7)和(1.8)的所有条件 Lyapunov 指数都是负值, 但由于这两个系统都向混沌态(1.1)逼近,因此并不排除系统具有混沌解。

2 数值实验

我们用上面讨论过的同步方法对 Lorene 系统进行同步数值实验。 Lorene 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + Rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{2.1}$$

取第一个方程的第一项为 $s(t) = h(x) = \sigma y_1$。自然,我们也可将(2.1)复制得到类似于(1.4)的系统。由(1.6)作替换 $10k_1 \to k_1$, $10k_2 \to k_2$,我们得到 $s_x(t) = k_1x_2 + k_2y_2$。同样,将 $s(t)$ 分为两部分,并且令 $h_1(x) = k_1y_1$, $h_2(x) = k_2y_2$(其中 $k_1 + k_2 = \sigma$),为了引入驱动项,我们作替换 $h_2(y_2) \to h_2(y_1)$,得到 $s_x(t) = k_1y_2 + k_2y_1$,显然,这里的驱动项为 k_2y_2。同样,对于复制系统,有 $s_y(t) = k_1y_2 + k_2y_1$,驱动项为 k_2y_1。这样,能够实现混沌同步的总体系统为

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + k_1y_1 + k_2y_2 \\ \dot{y}_1 &= Rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1 \end{aligned}\right\} A\text{ 系统} \\ &\left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\sigma x_2 + k_1y_2 + k_2y_1 \\ \dot{y}_2 &= Rx_2 - y_2 - y_2z_2 \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2 \end{aligned}\right\} B\text{ 系统} \end{aligned}\right\} \text{整体复合系统} \tag{2.2}$$

可以看出, A, B 系统是互为驱动的,驱动变量分别为 k_2y_2 和 k_2y_1, k_2 表征偶合强度的大小。为了观察两个系统的同步情况,可以通过求 A 系统与 B 系统之差的动力学方程,以此来估计两个系统状态差 δx 的时间演化

$$\delta\dot{x} = \begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & k_1 - k_2 & 0 \\ \sigma - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = Z\,\delta x \tag{2.3}$$

其中 $\delta x = (\delta x, \delta y, \delta z)$,同步系统的稳定性可以通过解 Z 矩阵的本征值来进行研究。但由于 Z 矩阵包含系统变量,其本征值 $\lambda = \lambda(x, y, z)$ 将是系统变量的函数, 当系统处于混沌态的情况下, 本征值不可能为一固定值(这是求线性系统本征值的一个特点, 解决这一问题也有其他的方法)。 有人建议用代入变量平均值的方法求本征值[14], 即求出所谓的 Lyapunov 谱(Lyapunov apectrum)。当所有本征值的实部都小于或等于零时, A、B 系统间应该可以实现稳定的同步。我们取一个特别简单的情况(之所以特别简单,是由于在这种情况下, x 变量在渐近过程中实际上是可以分离的。下面图中说明了这一点)。当 $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}\sigma$ 来说明这一点。本征值方程可以简化为

$$|Z - \lambda I| = |-\sigma - \lambda| \begin{vmatrix} -1-\lambda & -x \\ x & -b-\lambda \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

从上式解出本征值为

$$\lambda_1 = -\sigma$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left[-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 - 4(b + x^2)}\right] \tag{2.5}$$

取 $\sigma = 10, R = 28, b = 8/3$，系统为混沌态。由于$(1+b)^2 - 4(b + x^2) < 0$，三个本征值的实部都小于零，同步系统是稳定的。偶合强度 k_2 在一般取值时，情况要复杂一些，我们是通过求系统的最大条件 Lyapunov 指数谱确定同步系统的稳定性。图 1 为取不同 k_2 值时系统的最大条件 Lyapunov 指数，只要它的小于零，都能实现 A、B 系统间的同步。图 2 是 $k_2 = 2.5$ 时系统的同步过程，初值分别是(10.0，1.0，0.0)和(20.0，2.0，60.0)，图 3 为偶合系统在 x-y 平面内的同步情况。要注意 A、B 系统为对称系统，具有完全相同的条件 Lyapunov 指数，从图 1 中看出，只要 $k_2 > 2.0$ 即能实现两个混沌系统间的同步。同步后，系统具有与（2.2，2.1）完全相同的混沌性质。

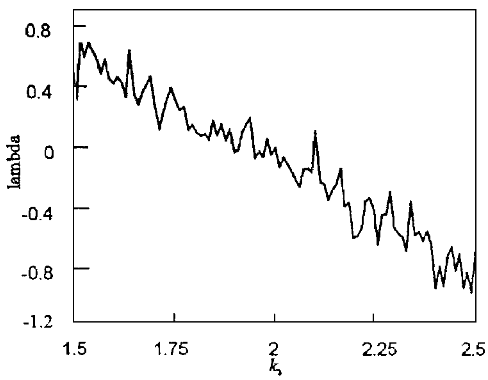

图 1　偶合强度 k_2 与条件 Lyapunov 指数的关系

Fig. 1　Relation between couple strength k_2 and conditional Lyapunov exponent

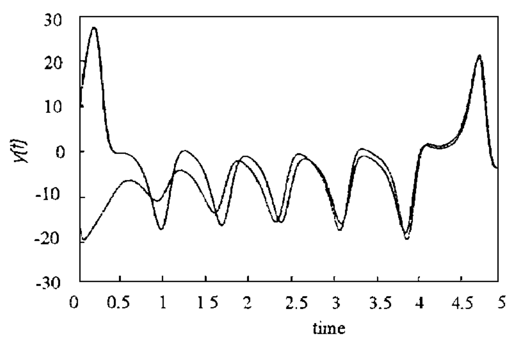

图 2　偶合强度 $k_2 = 2.5$ 时，A、B 系统间的同步过程

Fig. 2　Synchronization within systems A and B，when $k_2 = 2.5$

上面提到有人建议通过求解 Z 矩阵的本征值方程，然后代入系统变量的平均值以此确定系统的稳定性。如果这一方法可行，根据方程（2.3），同步过程中系统变量差必须服从指数型的收敛率，即 $\delta x \sim e^{\tau t}$。其中 τ 为本征值 λ 经坐标变换后的值。不管怎样，具有指数型的收敛率可以看作这一方法成立的必要条件。图 4（a），（b）分别是 $k_2 = 5.0$ 和 $k_2 = 4.8$ 时的收敛率，明显可以看出两者的差别（前者可以分离变量），但都具有指数型收敛率的特征。说明这也许是一种判断系统同步稳定性的有效方法。

将这一方法与主动-被动同步方法作一比较，结果后者在驱动变量比前者大一倍的情况下达到了相同的同步效果，这是容易理解的，因为 k_2 值表示偶合强度的大小，在主动-被动同步方法法中，只有主动系统对被动系统的单向驱动，而在我们相互偶合的同步方法中，对两个系统同时都进行了引导，因此所需偶合强度 k_2 只有主动-被动同步方法的一半。

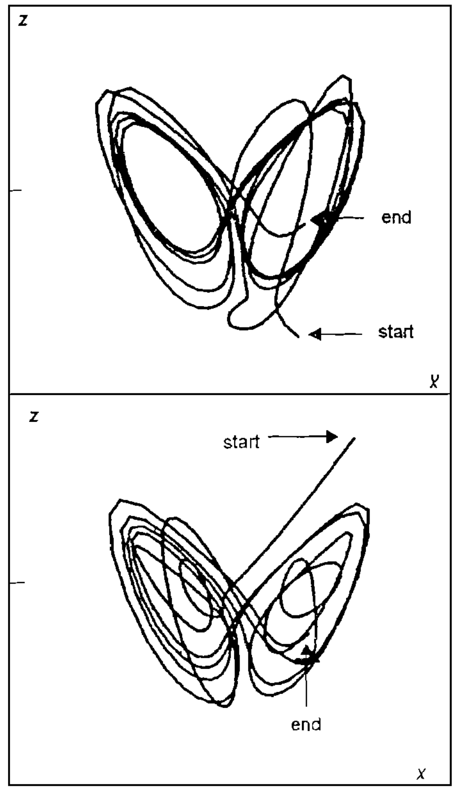

图 3　偶合强度 $k_2 = 3.5$ 时，A、B 系统间的同步情况

Fig. 3　Synchronization within systems A and B，when $k_2 = 3.5$

3　讨论

同步的方法有多种，但是不论那一种方法，都必须要在需要同步的系统之间交换或传递信息。在我们的方法中，首先将系统中的一项拆分，取其中一部分为驱动变量，然后分别复制两个系统 A，B，由第一步中选出的驱动变量同时对两个系统进行驱动，这样，互相偶合了对方的变量（偶合强度 k_2 在两个系统中可以相同，也可以不同，在我们的方法中两个系统都取在两个系统中相同，如果在 A 或 B 系统中取 $k_2 = 0$，就由相互偶合同步方法变为主动-被动方法），因

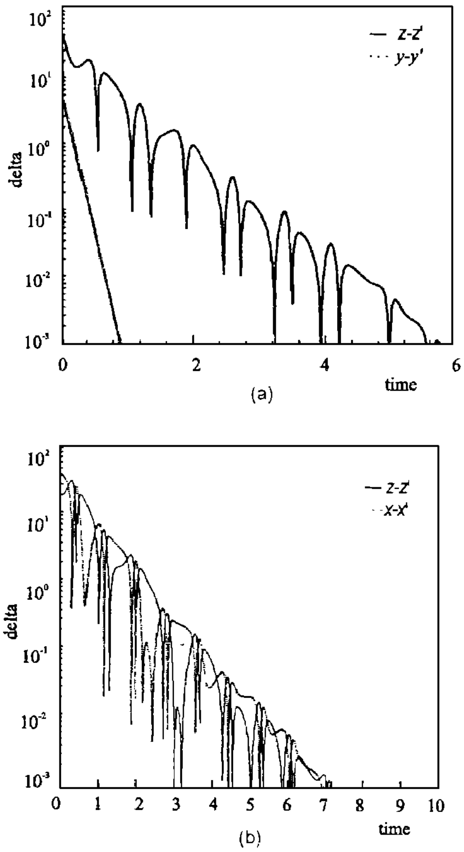

图 4　偶合强度 $k_2 = 4.8$（a）和偶合强度 $k_2 = 5.0$（b）x 的收敛率

Fig. 4　x convergences at $k_2 = 4.8$ (a) and $k_2 = 5.0$ (b)

此互相交换或传递了彼此的信息。与主动 - 被动方法不同，系统的同步是相互逼近，而非一个系统向另外一个系统的趋近。但在一定的条件下（例如其中一个系统的 $k_2 = 0$ 时），可以将主动 - 被动方法作为一个特例包含在我们的同步方法中。

同样，我们还可以将主动 - 被动方法与连续反馈方法进行比较。由于 $k_1 + k_2 = 10$，因此（2.6）中第一个方程可写为

$$\dot{y}_1 = -10y_1 + k_1y_2 + k_2x_2 = -10y_1 + 10y_2 + k_2(x_2 - y_2) \qquad (3.1)$$

上式中，如果将 $k_2(x_2 - y_2)$ 这一项理解为反馈流，显然可以看出这与连续反馈方法是等价的，同样，将（2.2）中 A，B 系统的第一个方程分别写为

$$\dot{x}_1 = -10x_1 + 10x_2 + k_2(y_2 - x_2) \qquad (3.2)$$

和与（3.1）相同的形式，可以看出最后一项都可以理解为反馈流，只不过这种反馈流是双向的。可见，互相偶合同步方法与双向连续反馈同步方法之间也具有等价的关系，因此，研究互相偶合同步方法具有更加广泛的意义：它不但可以将主动-被动方法作为特例包含其中，而且可将其领域扩展到连续反馈同步方法。本文中我们仅仅考虑了在一个变量上进行偶合这种最简单的情况，更加复杂和意义更加广泛的情况有待于进一步的研究。

参考文献

1　Pecora L M，Carroll T L. Phys Rer Lett，1990，64：821.

2　Pecora L M，Carroll T L. Phys Rer，1991，A44：2374.

3　Carrol T L，Pecora L M. Physica D，1993，67：126.

4　Kocarev L，Parlitx U. Phys Rev Lett 1995，74：5028.

5　Carroll T L，Pecora L M. IEEE trans Circui，1991，38：349.

6　Daido H. Phys Rev Lett，1988，61：231.

7　Kuramoto Y，Nishikawa I，Stati J. Phys，1987，49：569.

8　Kuramoto Y. Physica（Amstordam）D，1991，50：15.

9　Kuramoto Y. Chemical Osillations，Wavea，Turbulence 1984.

10　Winfree A T. The Geometry of Biological Time，1980.

11　Eckhorn E，Bauer R et al. Biol Cybernet，1988，60：121.

12　Gray C M，Koning P，Engel A K. Natuer（London），1989，338：334.

13　Pyragas K，Tamasevicius A. Phys Lett，1993，A180：99.

14　Louis M，Pecora，Thomas L. Carroll Phys Rev，1991，A44：2374.

（责任编辑：黎贞崇　蒋汉明）