

样条里兹法计算开口薄壁杆件约束扭转

A Spline Ritz Method for Analysing the Restrained Torsion of Thin-walled Bar with Open Section

杨绿峰 韩志斌* 李桂青*

Yang Lufeng Han Zhibin Li Guiqing

(广西大学土木建筑工程学院 南宁市西乡塘路 10号 530004)

(College. of Civ. Engng., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 提出了一类新的样条坐标矩阵。同时在符拉索夫理论的基础上,结合传统的里兹法,利用样条函数提出了开口薄壁杆件约束扭转计算的样条里兹法。

关键词 薄壁杆件 样条函数 样条里兹法

中图法分类号 Tu 311.1

Abstract Based on the theory of Vlasov, this paper proposed the method of spline Ritz to analyse the restrained torsion of thin-walled bar with open section, combining the traditional Ritz method and spline function method.

Key words thin-walled bar, spline function, spline Ritz method

对扭转理论的详尽研究始于 18 世纪末,物理学家 C. A. Coulomb 为了测定电线的扭转阻抗而发明了灵敏的扭称。Navier 在对横截面为任意形状的直杆扭转理论开展研究时,仍沿用了曾在圆形断面杆自由扭转理论及杆件弯曲理论中取得成功的“平截面假定”,即通常所指的“纳维叶假定”,但遭到失败。

Duleau 对横截面为长方形的直杆进行的扭转实验,也证明了 Navier 假定在此情况下是不成立的。为了解决这类问题,巴黎学士院力学部会员 A. Cauchy 将“横截面翘曲”这一概念引入系统的理论研究之中,并成功地找到了细长长方形截面杆扭转问题的弹性解。A. Cauchy 明确指出,受扭杆在一般情况下,其横截面不能保持为平面。在此基础上,St. Venant 于 19 世纪 50 年代提出了完善的自由扭转理论,即现在通常所说的“圣维南扭转”理论。而 L. Prandtl 于 1903 年提出的薄膜比拟法,使得圣维南扭转理论广泛应用于薄壁结构中。

1905 年, S. Timoshenko 在非均匀扭转的一般理论中取得突破性进展,对横截面不能自由翘曲的约束扭转问题进行了成功的研究。随后, Maillart 研究了

弯曲与扭转耦合作用问题,并首次提出了在薄壁杆件结构分析中非常重要的“剪切中心”概念。从 20 世纪 30 年代开始,前苏联杰出的科学家 V. Z. Vlasov 的一系列研究论文、论著,成功地发展了开口薄壁杆件在不考虑断面畸变情况下的扭转与弯曲相结合的综合理论。

时至今日,非薄壁杆结构力学已经成熟。而在工程上得到广泛应用的薄壁杆件结构力学由于起步晚而仍然处于发展中,许多工程中经常遇到的问题仍未得到圆满解决,特别是适合于薄壁杆件结构的特殊的数值计算理论仍待进一步研究、完善。

薄壁杆件受到扭转作用时,如果某些断面的纵向翘曲受到约束,则在杆件横截面上不仅存在有剪应力,而且还有正应力。这时,薄壁杆件在扭矩作用下,将不仅发生扭转,同时往往还发生弯曲。这种扭转称为约束扭转或弯曲扭转。

1 计算假定及基本概念

开口薄壁杆件也可按照常规的长柱壳理论分析计算。但在扭转荷载作用下,这种计算较复杂。为了简化计算,通常采用如下假设:

(1) 刚性周边假设: 横截面周边在自身平面内不变形,出平面可以翘曲。

(2) 符拉索夫假设: 中面上的剪切变形为零。

1997-12-30 收稿, 1998-05-25 修回。

* 武汉工业大学结构抗震研究所, 武汉, 430070 (Inst. of Aseismic Engng., Wuhan Univ. of Technology, Wuhan, Hubei, 430070)。

(3) 虎克定理成立

这里以 z 表示杆件轴向坐标, s 表示杆件断面壁中线的曲线坐标 以后不再说明. 根据上述假定, 横截面上某点 $M(z, s)$ 的切向 (s 方向) 位移 $v(z, s)$ 及出平面的纵向 (z 方向) 位移 $u(z, s)$ 分别为:

$$v(z, s) = d(s)\theta(z) \quad (1)$$

式中, $\theta(z)$ - 断面 z 绕扭心 B 转动的角度 θ ;

$d(s)$ - 断面 z 的扭心 B 到壁中线上过点 M 的切线之距离. 称点 B 为极点, d 为极径

$$\begin{aligned} u(z, s) &= - \int_0^s \theta'(z) d(s) ds + u_0(z) \\ &= - \theta'(z) \int_0^s d(s) ds + u_0(z) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $u_0(z)$ 是任意积分函数, 它表示 z 截面上 $s = 0$ 处的纵向翘曲位移.

$\int_0^s d(s) ds$ 称为点 $M(z, s)$ 的扇性坐标, 常用 $k(s)$

表示. 则式 (2) 可写为:

$$u(z, s) = - \theta'(z) k(s) + u_0(z) \quad (3)$$

为了在应力、应变的表达式中消去积分函数 $u_0(z)$, 可采用主扇性坐标, 仍记为 $k(s)$

根据式 (3) 及假定 (1) 和 (3), 不难推导出薄壁杆件横截面上的纵向正应变 X_k 及纵向正应力 ϵ_k 分别为:

$$X_k = \frac{\partial u}{\partial z} = - \theta''(z) k(s) \quad (4)$$

$$\epsilon_k = - E_1 \theta''(z) k(s) \quad (5)$$

式中, E_1 称为薄壁杆件的折算弹性模量, 且有:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu} \quad (6)$$

薄壁杆件发生约束扭转时, 横截面将产生翘曲. 因此在杆件断面上存在约束扭转正应力 ϵ_k . 为了与 ϵ_k 相平衡, 杆件的纵向纤维间必将产生剪应力 f_k . 根据剪应力互等定理, 在与 z 轴相垂直的杆的横截面上, 必然作用有与 f_k 大小相等的剪应力. 这样, 杆件在约束扭转时, 断面上除了自由扭转剪应力 f_H 外, 还有因弯曲而产生的剪应力, 称为二次剪应力或扭转剪应力 f_k . 因此, 杆件横截面上作用的剪应力 f 由两部分组成, 其一是自由扭转剪应力 f_H , 另一是约束扭转剪应力 f_k .

对于受约束扭转的薄壁杆件而言, 作为断面上剪应力的一个主要组成部分的自由扭转剪应力 f_H 是引起剪应变的一个主要因素. 事实上, 它所引起的剪应变远大于弯曲剪应力引起的剪应变. 因而在开口薄壁杆件约束扭转计算中, 通常不计与弯曲剪应力 f_k 相应的剪应变.

自由扭转剪应力 f_H 沿壁厚反对称分布, 并且可

以合成为圣维南扭矩 M_H

$$M_H = GI\theta' \quad (7)$$

式中, θ' 、 I 分别表示杆件横断面的扭率及抗扭惯性矩

双力矩 B 也是薄壁杆件结构力学中的一个重要概念, 其定义为:

$$B(z) = \int_A \epsilon_k k dA = - E_1 I_k \theta''(z) \quad (8)$$

式中, I_k 是断面 z 的主扇性惯性矩, 且:

$$I_k = \int_A k^2 dA \quad (9)$$

根据式 (8) 可求出 $\theta''(z)$, 再代回式 (5), 得:

$$\epsilon_k = \frac{B k}{I_k} \quad (10)$$

2 里兹法及样条里兹法

里兹法是一种典型的变分近似法. 它的基本思想是用有限自由度问题来代替原来的无限自由度问题, 以寻求尽量符合要求的近似解答. 里兹法的标准过程是这样的: 首先把具有无限自由度的待求位移用一个只有有限多个 (不妨设为 n 个) 未知数的位移函数近似逼近:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (11)$$

其中 N_i 是已知函数, a_i 是待定参数. 函数 u 应是坐标的连续函数, 且满足边界条件, 这样变形连续条件自然满足, u 即是容许位移. 根据变分原理知, u 应该能够使以待定位移为未知函数的能量泛函 $C = C(u)$ 取极小值. 考虑式 (11), 则变分原理的形式将体现为:

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial C}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial C}{\partial a_n} \delta a_n = 0 \quad (12)$$

考虑到 $\delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_n$ 的任意性及相互独立性, 得:

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

求解方程组 (13), 即能得到 a_1, a_2, \dots, a_n 的解答, 进而确定式 (11) 的近似函数 u , 这就是里兹法.

近似解的精度与式 (11) 中 N_i 的选取形式及未知参数 a_i 的个数多少有关. 由于我们是以有限自由度来逼近无限自由度. 所以, 一般来说未知参数越多 (即 n 越大), 解的精度越高. 另一方面, 恰当选取 N_i 的形式也至关重要. 对于某一问题, 若能找到一组合适的试函数 N_i , 往往就能以较少的未知参数 (即 n 较小) 得到较高精度的解答, 反之亦然.

样条函数是一种光滑度极高的分段多项式. 将它做为式 (11) 中的试函数 N_i , 可以取得令人满意的结果. 这种将样条函数作为试函数的变分近似法, 我

们命名为样条里兹法。它兼有解析法和数值离散法的优点,能够以较少的离散自由度取得较高的计算精度。其位移场为:

$$u = [B][Q]\{c\} \quad (14)$$

式中

$$[B] = [B_{-1} \ B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{n+1}]$$

$B_i (i = -1, 0, \dots, n+1)$ 表示 $B_{3,i}(z)$, 是三次等

距 B 样条函数, 且有:

$$B_{3,i}(z) = \begin{cases} 0, & z \in [z_{i-2}, z_{i+2}] \\ (z - z_{i-2})^3, & z \in [z_{i-2}, z_{i-1}] \\ \frac{1}{6h^3} \left\{ \begin{aligned} (z - z_{i-2})^3 - 4(z - z_{i-1})^3, & z \in [z_{i-1}, z_i] \\ (z_{i+2} - z)^3 - 6(z_{i+1} - z)^3, & z \in [z_i, z_{i+1}] \\ (z_{i+2} - z)^3, & z \in [z_{i+1}, z_{i+2}] \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (15)$$

它对应区间 $[0, l]$ 上的均匀分割

$$\Delta: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = l$$

$$z_i = z_0 + ih_j \quad h = \frac{l}{n} \quad (16)$$

$$\{c\} = [c_{-1} \ c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n \ c_{n+1}]^T$$

这里, $c_i (i = -1, 0, 1, \dots, n+1)$ 表示结点 z_i 上的待定未知参数;

$[Q]$ 是 $n+3$ 阶方阵, 称为样条坐标矩阵。当 $n \geq 2$ 时, 可取:

$$[Q] = \text{diag}([Q_0] \ [I] \ [Q_n]) \quad (17)$$

这里, $[I]$ 是单位方阵; $[Q_0]$ $[Q_n]$ 都是 3 阶方阵, 它们分别取决于 $z = z_0$ $z = z_n$ 端的边界支承条件。对应于简支边, 可取:

$$[Q_{01}] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Q_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

对应于简单固定边 (也称为滑动固定边), 可取:

$$[Q_{02}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Q_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

例如, 对于左端简支右端滑动支承的杆件, 式 (17) 中的 $[Q_0]$ $[Q_n]$ 可分别取式 (18) 中的 $[Q_{01}]$ 及式

(19) 中的 $[Q_{n2}]$ 而对应于固定支承或自由边界条件, $[Q_0]$ $[Q_n]$ 可分别取 (18) (19) 两式中的任意一种。

3 开口薄壁杆件约束扭转计算的样条里兹法

(1) 开口薄壁杆件约束扭转应变能:

正如前文所述, 在开口薄壁杆件的横截面上, 自由扭转剪应力 τ_H 引起的剪应变远大于二次剪应力 τ_k 所引起的剪应变, 因此可以忽略二次剪应力对杆件应变能的贡献

故而剪应力对杆件应变能的贡献为:

$$U_H = \int_V \frac{\tau_H^2}{2G} dV = \int_l \frac{M_H^2}{2GI_t} dz = \int_0^l \frac{GI_t \theta'^2}{2} dz \quad (20)$$

式中, G 表示剪切模量, GI_t 表示开口薄壁杆件横截面上的抗扭惯性矩

另外, 约束扭转正应力产生的应变能为:

$$U_B = \int_V \frac{\sigma_k^2}{2E_1} dV = \int_l \frac{B^2(z)}{2E_1 I_k} dz = \int_l \frac{E_1 I_k \theta''^2}{2} dz \quad (21)$$

(2) 开口薄壁杆件约束扭转计算的样条里兹法

对于图 1 所示开口薄壁杆件, 在分布扭矩 m 作用下, 发生约束扭转。已知杆件的材料特性常数及截面惯性矩 I_k I_t 等。这里我们利用样条里兹法计算薄壁杆发生的位移及内力。

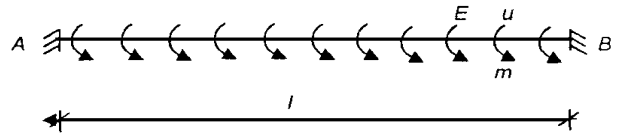


图 1 分布扭矩 m 作用下的开口薄壁杆件

Fig. 1 Thin-walled bar with open section under the distributed torsion m

在薄壁杆的扭转角 θ 上, 均布荷载 m 及集中荷载 M_0 的势能为:

$$W_P = - \int_0^l m\theta dz - M_0\theta(z_0) \quad (22)$$

式中, z_0 表示 M_0 的作用位置。

根据上式及式 (20) (21), 可以得到开口薄壁杆件约束扭转的总势能泛函:

$$C = U_B + U_H + W_P = \frac{1}{2} \int_0^l [E_1 I_k \theta''^2 + GI_t \theta'^2 - 2m\theta] dz - M_0\theta(z_0) \quad (23)$$

可以看出, C 是关于扭角 $\theta(z)$ 的泛函。下面我们利用三次 B 样条函数建立 θ 的位移场:

$$\theta = [B][Q]\{c\} \quad (24)$$

式中, $[B]$ $[Q]$ $\{c\}$ 同前文所述

将式 (24) 代入式 (23) 同时, 为了简化推导, 假

定分布荷载 m 及薄壁杆件的抗弯、抗扭刚度沿 z 方向为常数。整理得:

$$C = \frac{1}{2} \{c\}^T (E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]) \{c\} - \{c\}^T \{P\} \quad (25)$$

式中

$$[\Lambda^{22}] = [Q]^T [B^{22}] [Q];$$

$$[\Lambda^{11}] = [Q]^T [B^{11}] [Q]$$

$$[B^{22}] = \int_l [B'']^T [B''] dz;$$

$$[B^{11}] = \int_l [B']^T [B'] dz$$

$$\{P\} = m [Q]^T \{f\} + M_0 [B(z_0)]^T;$$

$$\{f\} = \int_H [B]^T dz$$

$$[B(z_0)] = [B_{-1}(z_0), B_0(z_0), B_1(z_0), \dots,$$

$B_{m-1}(z_0)]$

这里, $B_i(z_0)$ 表示三次样条 $B_{3,i}(z)$ 在 z_0 点的值。

根据变分原理

$$WC = \frac{\partial}{\partial \{c\}} W\{c\} = \{0\}$$

可得:

$$\frac{\partial}{\partial \{c\}} = (E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]) \{c\} - \{P\} = \{0\}$$

所以,有

$$[G] \{c\} = \{P\} \quad (26)$$

式中,

$$[G] = E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]$$

在式(26)中引入边界条件并求解之,可得到参数 $\{c\}$ 的解答。进而即可确定转角 θ 及杆件内力。

4 边界条件

受到约束扭转的开口薄壁杆件,其杆端边界条件有以下四种情况:

(1) 固定端 $\theta = 0, \theta' = 0$

(2) 铰支端 $\theta = 0$

(3) 滑动端 $\theta' = 0$

(4) 自由端 $\theta \neq 0, \theta' \neq 0$

因而,在方程(26)中可按如下方式引入边界位移条件(不失一般性地以 $z = z_0$ 端为例):

(1) 固定端,可取 $c_{-1} = \omega = 0$

(2) 铰支端或滑动端,可取 $c_{-1} = 0$

(3) 自由端,可取 $c_{-1} \neq 0, \omega \neq 0$

5 算例

长为 200 cm, 厚为 1 cm 的槽型截面薄壁杆件, 截面尺寸如图 2 示。且两端铰支, 跨中作用一个不经过剪切中心的横向集中力 $P = 1 \text{ kN}$ 。材料弹性模量为 $2. \times 10^7 \text{ N/mm}^2$, 泊松比为 0.25 利用样条里兹法求得各截面扭转角如表 1 所示。

表 1 薄壁杆件转角

Table 1 Torsion angles of the thin-walled bar

截面位置 Place of cross section	样条里兹法 Spline Ritz method	解析解 Analytic solution
$L/4$	119.53	119.7
$L/2$	327.86	327.9
$3L/4$	223.37	224.4

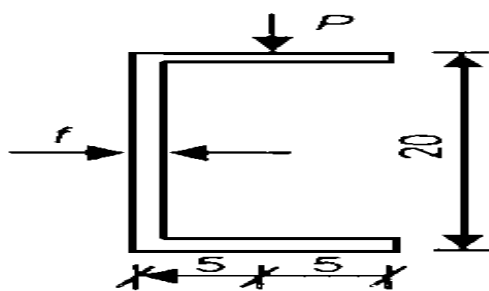


图 2 薄壁杆的槽型截面尺寸

Fig. 2 Size of the trough cross section of thin-walled bar

6 结语

本文建立的样条矩阵具有较强的适应性。从开口薄壁杆件的样条里兹法的计算方程及算例的计算结果看, 本方法不仅计算格式简单, 离散自由度较少, 同时具有较高的精度。

参考文献

- 1 包世华, 周 坚. 薄壁杆件结构力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1991.
- 2 杨绿峰, 高兑现, 李桂青. 箱型梁剪力滞效应求解的样条里兹法. 广西大学学报, 1998, 23 (1).
- 3 杨绿峰. 模糊随机有限元法及其应用. 武汉工业大学博士学位论文, 1998.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)