

定分布荷载  $m$  及薄壁杆件的抗弯、抗扭刚度沿  $z$  方向为常数。整理得:

$$C = \frac{1}{2} \{c\}^T (E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]) \{c\} - \{c\}^T \{P\} \quad (25)$$

式中

$$[\Lambda^{22}] = [Q]^T [B^{22}] [Q];$$

$$[\Lambda^{11}] = [Q]^T [B^{11}] [Q]$$

$$[B^{22}] = \int_l [B''']^T [B'''] dz;$$

$$[B^{11}] = \int_l [B']^T [B'] dz$$

$$\{P\} = m [Q]^T \{f\} + M_0 [B(z_0)]^T;$$

$$\{f\} = \int_H [B]^T dz$$

$$[B(z_0)] = [B_{-1}(z_0), B_0(z_0), B_1(z_0), \dots,$$

$B_{m-1}(z_0)]$

这里,  $B_i(z_0)$  表示三次样条  $B_{3,i}(z)$  在  $z_0$  点的值。

根据变分原理

$$WC = \frac{\partial}{\partial \{c\}} W\{c\} = \{0\}$$

可得:

$$\frac{\partial}{\partial \{c\}} (E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]) \{c\} - \{P\} = \{0\}$$

所以,有

$$[G] \{c\} = \{P\} \quad (26)$$

式中,

$$[G] = E_1 I_k [\Lambda^{22}] + GL [\Lambda^{11}]$$

在式(26)中引入边界条件并求解之,可得到参数  $\{c\}$  的解答。进而即可确定转角  $\theta$  及杆件内力。

#### 4 边界条件

受到约束扭转的开口薄壁杆件,其杆端边界条件有以下四种情况:

(1) 固定端  $\theta = 0, \theta' = 0$

(2) 铰支端  $\theta = 0$

(3) 滑动端  $\theta' = 0$

(4) 自由端  $\theta \neq 0, \theta' \neq 0$

因而,在方程(26)中可按如下方式引入边界位移条件(不失一般性地以  $z = z_0$  端为例):

(1) 固定端,可取  $c_{-1} = \omega = 0$

(2) 铰支端或滑动端,可取  $c_{-1} = 0$

(3) 自由端,可取  $c_{-1} \neq 0, \omega \neq 0$

## 5 算例

长为 200 cm, 厚为 1 cm 的槽型截面薄壁杆件, 截面尺寸如图 2 示。且两端铰支, 跨中作用一个不经过剪切中心的横向集中力  $P = 1 \text{ kN}$ 。材料弹性模量为  $2. \times 10^7 \text{ N/mm}^2$ , 泊松比为 0.25 利用样条里兹法求得各截面扭转角如表 1 所示。

表 1 薄壁杆件转角

Table 1 Torsion angles of the thin-walled bar

截面位置 of cross section	Place	样条里兹法 Spline Ritz method	解析解 Analytic solution
$L/4$		119.53	119.7
$L/2$		327.86	327.9
$3L/4$		223.37	224.4

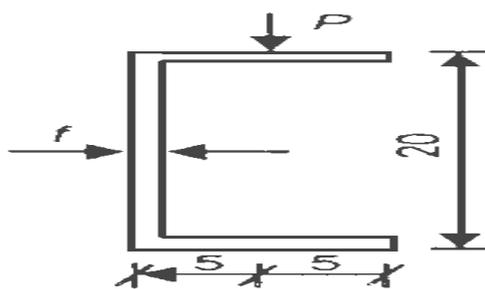


图 2 薄壁杆的槽型截面尺寸

Fig. 2 Size of the trough cross section of thin-walled bar

## 6 结语

本文建立的样条矩阵具有较强的适应性。从开口薄壁杆件的样条里兹法的计算方程及算例的计算结果看, 本方法不仅计算格式简单, 离散自由度较少, 同时具有较高的精度。

### 参考文献

- 1 包世华, 周 坚. 薄壁杆件结构力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1991.
- 2 杨绿峰, 高兑现, 李桂青. 箱型梁剪力滞效应求解的样条里兹法. 广西大学学报, 1998, 23 (1).
- 3 杨绿峰. 模糊随机有限元法及其应用. 武汉工业大学博士学位论文, 1998.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)

与方向场  $(h(y), -f(x)h(y) - g(x))$  都横截的. 所以它们与  $\Gamma$  的交点都只有一个. 由 (5) 的解对初值的连续依赖性, 从这两点出发的系统 (5) 的轨线也进入  $\Gamma$  包围的区域,  $\Gamma$  可作为环域的外境界线.

$\lambda(x, y) = \int_0^y h(s) ds + \int_0^x g(x) dx$ , 对充分小的正常数  $C$ , 闭曲线  $\Gamma: \lambda(x, y) = c$  包围原点且位于  $\Gamma$  包围的区域内. 易计算得当  $0 < |x|, |y| \ll 1$  时有  $\frac{d\lambda}{dt} = h(y)\dot{y} + g(x)\dot{x} = -h^2(y)h(x, y) > 0$ . 故  $\Gamma$  可作为环域的内境界线. 由环域定理知系统 (5) 存在非平凡周期解.

**注 1** 定理中对  $h, g$  的光滑性要求是用来保证 (5) 的初值问题解的唯一性, 它们可以适当减弱.

同理可证.

**定理 2** 设  $g(x), h(y) \in C^1(R)$  满足 (C<sub>1</sub>),  $h(x, y) \in C^1(R^2)$  满足 (C<sub>2</sub>), 若存在  $f(x, y) \in C^1(R^2)$  使得  $h(x, y) > f(x, y) (\forall (x, y) \in R^2)$  且

$$\dot{x} = h(y) \quad \dot{y} = -f(x, y)h(y) - g(x)$$

存在非零周期解, 则系统 (5) 也存在非零周期解.

设  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ , 根据文献 [4] 的定理 2 得

**引理 1** 设  $\lim_{y \rightarrow \infty} |h(y)| > 0$ , (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>) 成立, 且

$$(H_1) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) > -\infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} F(x) < +\infty;$$

$$(H_2) \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x g(s) ds + F(x) \operatorname{sgn} x = +\infty;$$

(H<sub>3</sub>)  $\exists a \geq 0, r(x) \in C^1((-\infty, a], R^+)$  (或  $r(x) \in C^1([a, +\infty), R^+)$ ) 使得

$$h(r(x))[f(x) + r^1(x)] + g(x) \geq 0 \text{ (或 } \leq 0)$$

则系统 (6) 存在非零周期解.

由定理 1 和引理 1 得

**定理 3** 设  $\lim_{y \rightarrow \infty} |h(y)| > 0, h(y), g(x) \in C^1(R)$

满足 (C<sub>1</sub>),  $h(x, y) \in C^1(R^2)$  满足 (C<sub>2</sub>), 且

(C<sub>3</sub>)  $\exists A > 0, c > 0$  使得当  $|x| > A$  时有

$$h(x, y) > \frac{c}{|x|} (\forall y \in R);$$

(C<sub>4</sub>)  $\exists a \geq 0, r(x) \in C^1((-\infty, -a], R^+)$  (或  $r(x) \in C^1([a, +\infty), R^+)$ ) 使得

$$h(r(x))[c + r^1(x)|x|] + |x|g(x) \geq 0 \text{ (或 } \leq 0);$$

则系统 (5) 存在非零周期解.

**注 2** 当  $h(y) \equiv y$ , 本文推广了文献 [3] 的主要结果.

**例 1** 对任意自然数  $n$ , 系统

$$\dot{x} = \arctan y \quad \dot{y} = -\arctan y \cdot (1 + y^{2n}) \prod_{i=1}^{2n-1} (x^2 - i^2) - \frac{x}{1+x^2}$$

存在非零周期解.

### 参考文献

- 1 叶彦谦等. 极限环论. 上海: 上海科技出版社, 1984.
- 2 张芷芬等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985, 196~234.
- 3 施宇鸣. Lénard 方程的比较原理. 应用数学, 1997, 10 (3): 61~63.
- 4 Huang Lihong, Yu Jianshe. On boundedness of solution of generalized Lénard's system and its application. Ann of Diff Eqs, 1993, 9 (3): 311~318.
- 5 Villari G. Periodic solutions of Lénard's equation. J Math Anal Appl, 1982, 86 379~382.
- 6 Villari G. On the qualitative of solution of Lénard equation. J Diff Eqs, 1987, 67 269~277.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 272 页 Continue from page 272)

达 9 维) 是指那些上面的弦会出现中止的面. 现在 D-膜被看作是至少与弦同样重要的基本实体.

所谓的“马尔达塞纳”数学之舞把弦论和量子论拉到了一起, 这中间 D-膜起到了不可或缺的作用. 马尔达塞纳利用 D-膜, 在常规的 4 维条件下提出了一种类似于量子色动力学的量子场论. 他还利用 D-膜提出了一种 10 维弦论 (其中的 5 个维被“卷起”隐藏), 而弦论本来就可以解释引力. 因此, 当马尔达塞纳证明这两种理论存在着密切关系的时候, 物理学家们兴奋难耐. 现在离实现所有 4 种作用力的统一或许更近了一步.

马尔达塞纳推测的基本思想是: 弦论所描述的时空的曲

率相当于是场论中颜色的数目; 颜色越多, 则曲率越小. 在两个不同的理论物理的世界中, 人们或许已经意外地发现了一座桥梁.

马尔达塞纳的研究还支持了一项新出现的热门理论. 这项新理论认为, 宇宙相当于是全息成像的产物. 在激光全息摄影术中, 三维的物体被投射到二维的平面上, 同时保留原物影像的丰富信息. 在马尔达塞纳的模型中, 4 维的场论可以被想象成为 5 维的弦论 (不要忘记, 另外 5 个维被“卷起”并隐藏起来) 的全息投影. 在全息的宇宙中, 某一空间内所有事物的信息会以某种方式显示在其表面. 这一概念的诡谲含义才刚刚开始显露.

(摘自《参考消息》1998 年 11 月 22~23 日第 7 版)