DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.04.012
广西科学 Guangxi Sciences 1998, 5 (4): 282~284

经典 Ramsey数 $R(5,18)$、$R(5,23)$和 $R(5,26)$的新下界*
New Lower Bounds of Classical Ramsey Numbers $R(5,18)$、$R(5,23)$ and $R(5,26)$

苏文龙　　罗海鹏**
Su Wenlong　　Luo Haipeng

(广西计算中心　南宁市星湖路 32号　530022)
(Guangxi Computing Center, 32 Xinghulu, Nanning, Guangxi, 530022)

摘要　构造了 3个新的素数阶循环图.从而得到了 3个 Ramsey数的新下界: $R(5,18)\geqslant 282$, $R(5,23)\geqslant 432$, $R(5,26)\geqslant 464$.

关键词　Ramsey数　下界　素数阶循环图
中图法分类号　O 157.5; TP 312

Abstract　Three prime order cyclic graphs are structured, and new lower bounds of three Ramsey numbers are obtained $R(5,18)\geqslant 282$, $R(5,23)\geqslant 432$, $R(5,26)\geqslant 464$.

Key words　Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph

1　一个简单的例子

图 1是一个 5个顶点的完全图,其中有些顶点用实线相连,构成一个循环图,其他用虚线相连.容易验证,在这个图中既没有实线的 3点完全子图 K_3,也没有虚线的 3点完全子图 (或称独立点集)$\bar{K}_3$.因此,对于 5个顶点的图,无论怎样联边都一定有 3点完全子图或 3独立点集出现,这是不可能的.至少要有 6个顶点才可能出现.我们把一定包含有 3点完全子图或 3独立点集的图的最少的顶点数记为 $R(3,3)$,则有 $R(3,3)\geqslant 6$.

2　Ramsey定理

在组合数学中有著名的

Ramsey定理[1]: 对于任意给定的 $n\geqslant 2$个正整数 $u_1,u_2,\cdots,u_n\geqslant 2$,存在最小正整数 R,当 $s\geqslant R$时用 n种颜色把 s阶完全图 G的边任意染色,则一定存在各边都染第 i种颜色的 u_i阶完全子图 (简称第 i色的 u_i点团).这里 i是 $1,2,\cdots,n$中的某一个.

上述正整数 R称为 2阶 Ramsey数 $R(u_1,u_2,\cdots,u_n;2)$.我们只研究不平凡的 2阶 Ramsey数,约定 $u_1,u_2,\cdots,u_n\geqslant 3$,并简记上述 Ramsey数为 $R(u_1,u_2,\cdots,u_n)$.

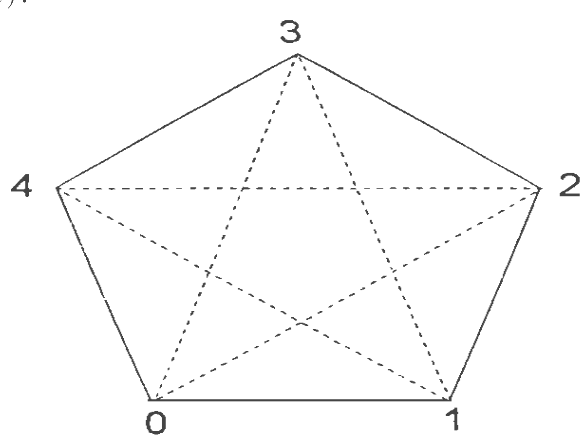

图 1　5顶点完全图

Fig. 1　A complete graph with five vertices

3　已知的 Ramsey数

Ramsey定理只解决了 Ramsey数的存在性问题,并未给出一系列的 Ramsey数的具体的值.给出 Ramsey数的准确值是图论的四大难题之一,是组合数学的第一大困难问题.只有 9个形如 $R(t,u)$ $(t\geqslant 3,u\geqslant 3,u\geqslant t)$的 Ramsey数被确定[2].这 9个 Ramsey数如下: $R(3,3)=6$, $R(3,4)=7$, $R(3,5)=14$, $R(3,6)=18$, $R(3,7)=23$, $R(3,8)=28$, $R(3,9)=$

1998-04-24收稿.
* 广西科学基金资助项目.
** 广西科学院,南宁市江南路西一里 20号, 530031(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jiangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031).

$36, R(4,4)=18, R(4,5)=25$.

其他 Ramsey数 $R(t,u)$ 的值都还是未知的，人们常常用给出某个具体的 Ramsey数的上界或下界，并且不断地改进它们的方法，来逐步接近这个 Ramsey数的准确值.

对于 Ramsey数 $R(5,5)$，目前还不能找到它的准确值，已知的情况是: $43\geqslant R(5,5)\geqslant 49$.

曾和爱因斯坦合作发表过 7篇论文的著名数学家 P. Erdös (他一生发表了 1000篇论文) 经常用下面虚拟的小故事来说明寻找 Ramsey数的困难程度. 这个故事是这样的: 有一个邪恶的外星妖精来到地球上，无理地向人类提出要求，必须告诉 Ramsey数 $R(5,5)$ 等于多少，否则它就毁灭人类. P. Erdös认为，这时我们人类的最好办法是动员地球上所有的计算机科学家和所有的计算机放下手里的一切工作，集中力量来解决这个问题，争取得出 $R(5,5)$ 的值，来回答妖精挑衅式的提问. 但是如果这个妖精不是要 $R(5,5)$ 的值，而是要 $R(6,6)$ 的值，那就更困难得多了. P. Erdös认为，这已经超出了我们人类能力的范围，在这种情形下我们人类就别无他法，只有动员地球上所有的军队和所有的武器，在这个妖精毁灭我们之前先消灭它.

至于多染色 Ramsey数的准确值，自从 1955年 R. E. Greenwood和 A. M. Gleason[2]得到 $R(3,3,3)=17$后，至今还没有任何新的进展.

4 Ramsey数 $R(5,u)$目前最好的下界

近年来人们用循环图的方法得到一些 Ramsey数的下界[3,4]. 但当图的顶点个数较大时寻求有效参数构造一般的循环图是极其困难的. 我们研究了素数阶循环图的基本性质，提高了运算效率，得到了一些 Ramsey数的新的下界[5-10]. 本文在此基础上提出寻求有效参数构造正则循环图的新的方法，又得到 3个 Ramsey数的新的下界.

根据 S. P. Radziszowski发表在《The Electronic Journal of Combinatorics》中的权威动态综述“Small Ramsey Numbers”的 1997年 7月 16日的更新版本[2]，$R(5,u)$ 已知的最好下界如下: $R(5,5)\geqslant 43$, $R(5,6)\geqslant 58$, $R(5,7)\geqslant 80$, $R(5,8)\geqslant 95$, $R(5,9)\geqslant 114$, $R(5,10)\geqslant 118$, $R(5,11)\geqslant 140$, $R(5,12)\geqslant 150$, $R(5,13)\geqslant 158$, $R(5,14)\geqslant 182$, $R(5,15)\geqslant 198$.

其中 $u=11, 12, 13, 14, 15$时的下界是我们在参考文献 [5] 和 [6] 中给出的.

在此之后，我们又在文献 [7] 中改进了 $u=12, 13, 14, 15$时的下界，情形如下: $R(5,12)\geqslant 152$, $R(5,13)\geqslant 164$, $R(5,14)\geqslant 194$, $R(5,15)\geqslant 212$.

我们还在文献 [8]、[9]中给出了 $u=16, 17, 18, 19, 20, 21$时的下界，情形如下: $R(5,16)\geqslant 224$, $R(5,17)\geqslant 252$, $R(5,18)\geqslant 272$, $R(5,19)\geqslant 312$, $R(5,20)\geqslant 338$, $R(5,21)\geqslant 374$.

在我们待发表的文章里还给出了 $R(5,22)$、$R(5,24)$ 和 $R(5,25)$ 的下界.

5 Ramsey数 $R(5,18)$、$R(5,23)$和 $R(5,26)$ 的新下界

给定素数 $p\geqslant 5$. 约定以下各项运算 (包括加、减、乘和乘方) 的结果都取模 p 同余归结到模 p 的剩余系

$Z_p=\{(1-p)/2,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,(p-1)/2\}$.

定义 1 选定参数集合

$S\subset Z_p^+=\{1,2,\cdots,(p-1)/2\}$.

设图 G的顶点集 $V(G)=Z_p$，边集

$E(G)=\{(x,y)\mid |x-y|\in S$. 其中 $x,y\in Z_p\}$.

我们称图 G为关于参数集合 S的 p阶循环图并记为 $G_p(S)$.

上述 $|x-y|$ 表示先把 $x-y$取模 p同余再取绝对值归结到 Z_p^+. 以下关于 $|x|$ 的表达式仿此.

定义 2 参数集合 S所含相异元素的个数 $|S|$ 称为图 $G_p(S)$ 的度数.

定义 3 设 g是 p的一个原根，参数集合

$S^*=\{1,|g^{a_1}|,|g^{a_2}|,\cdots,|g^{a_{n-1}}|\}$

称为正则的，如果它度数 $n\geqslant 2$并且满足正则条件

$$\begin{cases} 0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<(p-1)/2 \\ a_1=\min\{a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{n-1}-a_{n-2}\} \\ \quad <(p-1)/(2n-2). \end{cases}$$

参数集合是正则的 p阶循环图称为正则循环图.

我们利用图 $G_p(S)$ 的同构变换 $f: x\to g^i x\ (i\in Z_p, x\in Z_p)$ 证明了

定理 1 任意一个图 $G_p(S)$ 都同构于一个度数相同的正则循环图 $G_p(S^*)$.

这就为一个新的方法提供了理论依据: 在寻找有效参数时只须在正则的参数集合内进行探索，避免大量同构的图的重复计算. 显然，当 $a_1>1$时集合 S^* 的各元素的指数递增的步长$\geqslant a_1$，更快跑过集合 Z_p^+. 于是运算量大大减少了，能以较高的运算效率找到有效参数构造素数阶循环图，探索得一些 Ramsey数的较好的下界.

根据上述理论，通过计算机的计算，我们构造了 3个新的素数阶循环图:

1) 给定素数 $p_1=281$ 与参数集合

$S_1=\{1, 3, 5, 9, 10, 14, 16, 19, 22, 26, 27, 32, 38, 40, 42, 45, 47, 49, 53, 60, 66, 68, 71, 77, 78, 81, 83, 85, 89, 93, 97, 101, 109, 110, 117, 122, 124, 126, 128, 129, 130, 134, 135, 137\}$;

2) 给定素数 $p_2=431$ 与参数集合

$S_2=\{1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 34, 37, 42, 50, 53, 54, 55, 58, 65, 66, 67, 78, 83, 85, 88, 89, 93, 95, 100, 102, 111, 114, 116, 125, 127, 131, 133, 136, 137, 141, 146, 154, 159, 165, 168, 171, 176, 182, 186, 193, 195, 197, 198, 201, 208, 213, 215\}$;

3) 给定素数 $p_3=463$ 与参数集合

$S_3=\{1, 2, 3, 6, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 30, 31, 34, 38, 39, 45, 47, 55, 57, 61, 64, 66, 71, 74, 76, 80, 81, 85, 90, 93, 97, 98, 101, 106, 107, 110, 114, 117, 122, 126, 130, 133, 134, 139, 142, 143, 147, 149, 153, 158, 160, 163, 165, 166, 168, 170, 174, 175, 179, 184, 185, 189, 193, 195, 201, 202, 205, 209, 211, 212, 214, 216, 221, 225, 226, 228, 230\}$.

我们在计算机上验证了:如前定义的素数阶循环图 $G_{281}(S_1)$ 中既不含 5点团 K_5,也不含 18独立点集 $\overline{K}_{18}$;循环图 $G_{431}(S_2)$ 中既不含 5点团 K_5,也不含 23独立点集 $\overline{K}_{23}$;循环图 $G_{463}(S_3)$ 中既不含 5点团 K_5,也不含 26独立点集 $\overline{K}_{26}$.由于这些结论并根据 Ramsey 定理,我们就证明了

定理 **2** $R(5,18)\geqslant 282$, $R(5,23)\geqslant 432$, $R(5,26)\geqslant 464$.

上面第 1个结果改写了已知的最好的下界 $R(5,18)\geqslant 272$,后 2个结果填补了有关 Ramsey数下界的 2个空白.

参考文献

1 Ramsey F P. On a problem of formal logic. Proc London Math Soc, 2nd Ser, 1930, 30: 264~286.

2 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics l. 1994. DS1: 1~27.

3 Radziszowski S P, Kreher D L. Search algorithm for Ramsey graphs by union of group orbits. Journal of Graph Theory. 1988, 12: 59~72.

4 Piwakowski K. Applying tabu search to determine new Ramsey graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, # R6, 1996, 3: 1~4.

5 苏文龙,罗海鹏,李 乔. 经典 Ramsey 数 $R(4,12)$, $R(5,11)$ 和 $R(5,12)$ 新的下界. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.

6 苏文龙,罗海鹏,吴 康. 经典 Ramsey 数 $R(5,12)$, $R(5,13)$, $R(5,14)$ 和 $R(5,15)$ 的新下界. 广西大学学报, 1997, 22(4): 298~299.

7 苏文龙,罗海鹏,吴 康. 4个 Ramsey数 $R(5,12)$, $R(5,13)$, $R(5,14)$和 $R(5,15)$的新下界. 华中师范大学学报, 1997, 专辑: 70~71.

8 罗海鹏,苏文龙,吴 康. Ramsey数 $R(4,20)$ 和 $R(5,16)$、$R(5,17)$、$R(5,18)$、$R(5,20)$、$R(5,21)$ 的新下界. 广西科学, 1997, 4(4): 244~245.

9 苏文龙,罗海鹏,张正铀. 若干个经典 Ramsey数 $R(5,q)$ 的新下界. 计算机应用研究, 1997, (5): 10.

10 罗海鹏,苏文龙. Ramsey数 $R(6,n)$的两个下界. 计算机应用研究, 1997, (6): 27~28.

(责任编辑: 黎贞崇)

13个经典二色 Ramsey数的新下界

苏文龙、李乔和罗海鹏最近采用模 P的三次剩余等方法,一举获得了 13 个经典 Ramsey数的新的下界:

$R(5,15)\geqslant 242$, $R(6,12)\geqslant 230$, $R(6,14)\geqslant 284$, $R(6,15)\geqslant 374$, $R(6,16)\geqslant 434^*$, $R(6,17)\geqslant 548$, $R(6,18)\geqslant 614^*$, $R(6,19)\geqslant 710^*$, $R(6,20)\geqslant 878^*$, $R(7,19)\geqslant 758$, $R(8,17)\geqslant 674$, $R(8,18)\geqslant 740$, $R(8,19)\geqslant 860$

带“*”号的 4 个结果属首次报道,其余 9 个结果都超过了 S. P. Radziszowski发表在《Electronic J Combinatorics》上的权威动态综述“Small Ramsey Numbers”(1998年 7月 9日更新)中的相应结果。简述这 13 个新的结果的论文将另行发表。

(罗海鹏)