DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.02.006
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (2): 94~ 96

混合随机序列部分和的强收敛性

Strong Convergence Properties of the Partial Sum of Mixing Random Sequences

吴群英
Wu Quny ing
(桂林工学院基础部 桂林市建干路12号 541004)
(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要 讨论了混合序列部分和的强收敛性,所得结果推广和改进了文献 [1, 2],并推广了 Marcinkiewicz强大数律.

关键词 混合随机序列 强收敛 混合速度
中图法分类号 O 211

Abstract Strong convergence properties of the sums of mixing random sequences was discussed. We got the results which improved and extended results in references [1, 2] and extended Marcinkiewicz strong law of large number.

Key words mixing readom sequences, strong convergence, mixing rates

自从引入混合相依概念以来,不少学者研究了相依情况下的大数律,以前的工作主要集中在强平稳或同分布相依序列下的大数定律,获得了类似于 Marcinkiewicz强大数律.近来,一些学者开始研究非平稳,不同分布混合序列的大数律,如文献 [1, 2].文献 [1]的结果为:

定理 **A** 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$是 φ-mixing列, $EX_n = 0$, $\{n_k, k \geqslant 1\}$为自然数列的子集,满足 $k^k \leqslant n_k < (k+1)^{k+1}$, $\sup E|X_n|^p < \infty$, $p > 1$, $\sum_{i=1}^{n_k} \mathrm{h}(i) = O(n_k^{1-\frac{1}{p}-X})$, $X > 0$,

则 $n^{-1} S_n \to 0$ a. s. $n \to \infty$.

文献 [2]的结果为:

定理 **B** 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是 h-混合随机变量序列,$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{h}^{\frac{1}{2}}(i) < \infty$, $EX_i^2 < \infty$, $\forall i \geqslant 1$,若 $1 \leqslant r < 2$,且 $p > r$.

$$\lim_{x \to \infty} \sup x^p \sup_{i \geqslant 1} P(|X_i| > x) < \infty,$$

则 $n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0$ a. s. $n \to \infty$.

文献 [1, 2]对混合速度的要求太强,本文在不增加新条件下,对混合速度不作任何要求,讨论了比 h-混合更一般的 d-混合序列的强大数律,所得结果推广和改进了文献 [1, 2],同时推广了 Marcinkiewicz强大数律.

1 定义及引理

首先引入下记号

$\Gamma_1^k \triangleq \mathrm{e}(X_i, i \leqslant k)$, $\Gamma_{k+n}^{\infty} \triangleq \mathrm{e}(X_i, i \geqslant k+n)$,

$\boldsymbol{N}$为自然数集,$L_p(\mathscr{A})$为所有$\mathscr{A}$可测且 p阶矩有限的随机变量全体. $\|X\|_p \triangleq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$,一律以 c记与 n无关的正常数,不同之处可取不同的值.符号“$\ll$”表示通常的大“O”. I_A表示集合 A上的示性函数, $\log x$、 $\ln x$分别表示以 2和 e为底的对数.

$$\mathrm{d}(n) \triangleq \sup_{k \in N} \sup_{X \in L_2(\Gamma_1^k), Y \in L_2(\Gamma_{n+k}^{\infty})} \frac{|E(X-EX)(Y-EY)|}{\sqrt{VarX\ VarY}},$$

$$\mathrm{h}(n) \triangleq \sup_{k \in N} \sup_{A \in \Gamma_1^k, B \in \Gamma_{k+n}^{\infty}, P(A) \neq 0} |P(B|A) - P(B)|,$$

$$\mathrm{j}(n) \triangleq \sup_{k \in N} \sup_{A \in \mathscr{A}, B \in \beta, P(A)P(B) > 0} \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)P(B)},$$

$$\lambda(n) \triangleq \sup_{k \in N} \sup_{X \in L_{1/T}(\mathscr{A}), Y \in L_{1/U}(\beta)} \frac{|EXY - EXEY|}{\|X\|_{1/T} \|Y\|_{1/U}},$$

其中 $0 \leqslant T, U \leqslant 1$,且 $T + U = 1$.

定义 如 $\mathrm{d}(n) \to 0$, ($\mathrm{h}(n) \to 0$, $\mathrm{j}(n) \to 0$, $\lambda(n) \to 0$), $n \to \infty$,则称序列$\{X_n, n \geqslant 1\}$为 d-混合 (h-混合, j-混合, λ-混合)的.

引理[3] 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$为 d-混合序列, $EX_n = 0$, $\|X_n\|_q < \infty$, $q \geqslant 2$,则存在仅依赖于 q和 $\mathrm{d}(\cdot)$的常数 c,使得任意 $n \geqslant 1$均有

$$E|S_n|^q \leqslant c[n^{\frac{q}{2}} \exp(c\sum_{i=0}^{[\log n]} \mathrm{d}(2^i)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|X_i\|_2^q + n$$

1998-06-15收稿, 1998-09-22修回

$\exp(C\sum_{i=0}^{[\log n]} d^{2/q}(2^i))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_i\|_q^q]$,

其中 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$.

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 d-混合序列,满足:

$$EX_n = 0, \tag{1}$$

$$\sup_n E|X_n|^p < \infty, \tag{2}$$

则对 $1\leqslant r<2, r<p$,有

$$n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0 \quad \text{a. s.} \quad n\to\infty,$$

其中 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$.

由于 h-混合, j-混合, λ-混合都是 d-混合的[4],而定理 1对混合速度未作任何要求.故定理 1对 h-混合, j-混合, λ-混合也成立,有

推论 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 h-混合 (j-混合, λ-混合) 随机变量序列.若

$$EX_n = 0, \sup_n E|X_n|^p < \infty,$$

则对 $1\leqslant r<2, r<p$,有

$$n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0 \quad \text{a. s.} \quad n\to\infty.$$

证明 由性质: $\forall\, T\leqslant U$,有

$$(E|X|^T)^{1/T} \leqslant (E|X|^U)^{1/U}.$$

不失一般性,可设 $p<2$.

取 $0<W<\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$,对 X_n 截尾,记

$Y_n \triangleq X_n I(|X_n|<n^{\frac{1}{r}-W})$,有

$$n^{-\frac{1}{r}} S_n = n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) + n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n} EY_i + n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i) \triangleq I_1 + I_2 + I_3,$$

故要证明定理 1 只需证明:

$$I_i \to 0 \quad \text{a. s.} \quad n\to\infty \quad i=1,2,3.$$

由 Chebyshv不等式及定理的条件 (2).有

$$P(X_n \neq Y_n) = P(|X_n| \geqslant n^{\frac{1}{r}-W}) \leqslant \frac{1}{n^{(\frac{1}{r}-W)p}} E|X_n|^p \leqslant \frac{1}{n^{(\frac{1}{r}-W)p}}\sup_n E|X_n|^p \ll \frac{1}{n^{(\frac{1}{r}-W)p}}.$$

由 W的取法有

$$(\frac{1}{r}-W)p > 1.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n\neq Y_n) \ll \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(\frac{1}{r}-W)p}} < \infty$.

由 Borel-Cantelli引理有

$$I_1 = n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) \to 0 \quad \text{a. s.}. \tag{3}$$

由定理条件 (1), (2) 及 Hölder不等式

$$n^{-\frac{1}{r}}|\sum_{i=1}^{n} EY_i| = n^{-\frac{1}{r}}|\sum_{i=1}^{n} E(X_i - Y_i)| = n^{-\frac{1}{r}}|\sum_{i=1}^{n} EX_i I(|X_i|>i^{\frac{1}{r}-W})| \leqslant n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n} E|X_i| I(|X_i|>i^{\frac{1}{r}-W}) \leqslant n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=1}^{n} E|X_i|\frac{|X_i|^{p-1}}{i^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)}} \leqslant n^{-\frac{1}{r}}\sup E|X_i|^p\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i})^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)} \ll$$

$$n^{-\frac{1}{r}}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i})^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)}(\sum_{i=1}^{n}1)^{1-(\frac{1}{r}-W)(p-1)} \ll n^{-\frac{1}{r}}(\ln n)^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)} n^{1-(\frac{1}{r}-W)(p-1)} = \frac{(\ln n)^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)}}{n^{\frac{p}{r}-1-W(p-1)}}$$

$\because \theta \triangleq \frac{p}{r} - 1 - W(p-1) > 0$,

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)}}{n^{\theta/2}} = 0$,

$\therefore$ 当 n 充分大时,有

$(\ln n)^{(\frac{1}{r}-W)(p-1)} \leqslant n^{\theta/2}$.

故

$$I_2 = n^{-\frac{1}{r}}|\sum_{i=1}^{n} EY_i| \ll \frac{1}{n^{\theta/2}} \to 0. \tag{4}$$

记 $\tilde{S}_n \triangleq \sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)$.

取

$$q > \max\{\frac{2}{\frac{1}{2}(\frac{p}{r}-1) + W(1-\frac{p}{2})}, \frac{3}{W}, 2\},$$

有 $P(\frac{|\tilde{S}_n|}{n^{1/r}} \geqslant X) \leqslant \frac{1}{X n^{q/r}} E|\tilde{S}_n|^q$.

由引理

$$E|\tilde{S}_n|^q \ll n^{\frac{q}{2}}\exp(C\sum_{i=0}^{[\log n]} d(2^i))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Y_i - EY_i\|_2^q + n\exp(C\sum_{i=0}^{[\log n]} d^{\frac{2}{q}}(2^i))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Y_i - EY_i\|_q^q \triangleq J_1 + J_2.$$

$\because d(2^i)\to 0,\ d^{\frac{2}{q}}(2^i)\to 0.\quad i\to\infty.$

$\therefore \exists\, \boldsymbol{N}$,当 $i\geqslant \boldsymbol{N}$ 时,有

$d(2^i)\leqslant\frac{\ln 2}{C};\ d^{\frac{2}{q}}(2^i)\leqslant\frac{\ln 2}{C}$.

故当 n 充分大时,有

$$\exp(C\sum_{i=0}^{[\log n]} d(2^i)) = \exp[C\sum_{i=0}^{N} d(2^i) + C\sum_{i=N+1}^{[\log n]} d(2^i)] \leqslant \exp(C\sum_{i=0}^{N} d(2^i))\exp(\log n\cdot\ln 2) \ll n.$$

同样可得

$$\exp(C\sum_{i=0}^{[\log n]} d^{2/q}(2^i)) \ll n.$$

又 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Y_i - EY_i\|_2^q = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(E|Y_i - EY_i|^2)^{q/2} \ll \max_{1\leqslant i\leqslant n}(E|Y_i|^2)^{q/2} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(E|Y_i|^p|Y_i|^{2-p})^{q/2} \leqslant (\sup_i E|X_i|^p\max_{1\leqslant i\leqslant n} i^{(\frac{1}{r}-W)(2-p)})^{q/2} \ll n^{(\frac{1}{r}-W)(2-p)q/2}$.

$$\text{故 } J_1 \ll n^{\frac{q}{2}+1+(\frac{1}{r}-W)(2-p)\frac{q}{2}}. \tag{5}$$

由 Cr 不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Y_i - EY_i\|_q^q = \max_{1\leqslant i\leqslant n} E|Y_i - EY_i|^q \leqslant 2^{q-1}\max_{1\leqslant i\leqslant n} E(|Y_i|^q + E|Y_i|^q) \ll n^{(\frac{1}{r}-W)q}.$$

$$\text{故 } J_2 \ll n^{1+1+(\frac{1}{r}-W)q}. \tag{6}$$

由 (5)、(6) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|\tilde{S}_n|}{n^{1/r}} \geqslant \varepsilon\right) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}\left(\frac{p}{r}-1\right)+\delta\left(1-\frac{p}{2}\right)q-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta q-2}}.$$

由 q 的取法,上两级数都收敛,故

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(n^{-\frac{1}{r}}|\tilde{S}_n| \geqslant \varepsilon\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$I_3 = n^{-\frac{1}{r}}\tilde{S}_n \to 0 \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

结合(3)、(4)、(7)式,定理 1 得证.

当 $0 < r < 1$ 时,不需假设 $EX_n = 0$,且对任何随机序列(包括所有混合序列)均有:

定理 2 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为任意的随机变量序列.满足 $\sup_n E|X_n|^p < \infty$,则对 $0 < r < 1$, $r < p$,有

$$n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0 \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty.$$

证明 类似于定理 1,不失一般性,可设 $p \leqslant 1$

由 $\frac{|S_m|}{m^{1/r}} \leqslant \max\limits_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}}$, $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$.

要证定理 2,只需证明

$$\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}} \to 0 \quad \text{a.s.} \quad k \to \infty.$$

由 Chebyshw 不等式, C_r 不等式,且注意到 $p \leqslant 1$, C_r 不等式中的 $C_p = 1$,及定理条件,有

$\forall \varepsilon > 0$,有

$$P\left(\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}} \geqslant \varepsilon\right) \ll \frac{1}{2^{\frac{p}{r}k}} E \max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right)^p \leqslant \frac{1}{2^{\frac{p}{r}k}} E\left(\sum_{i=1}^{2^{k+1}} |X_i|^p\right) \leqslant \frac{1}{2^{\frac{p}{r}k}} 2^{k+1} \sup_i E|X_i|^p \ll \frac{1}{2^{\left(\frac{p}{r}-1\right)k}}.$$

$\because p/r - 1 > 0$,故

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \left(\frac{|S_n|}{2^{k/r}} > \varepsilon\right)\right) \ll \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{p}{r}-1}}\right)^k < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}} \to 0, \quad \text{a.s.} \quad k \to \infty.$$

故 $n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0$, a.s. $n \to \infty$.

定理 2 得证.

3 结论

(1) 本文推论比文献[1]少混合速度条件 $\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = O(n^{1-\frac{1}{p}-\varepsilon})$,所得结果却比文献[1]的强,文献[1]的结果是本文推论结果当 $r = 1$ 的特殊情况,因此,本文推广和改进了[1]的结果.

(2) 由文献[2]的条件 $p > r$, $\lim\limits_{x \to \infty} \sup x^p \sup_i P(|X_i| > x) < \infty$,可推出本文定理 1 的条件, $\exists p_1 > r$.使 $\sup_i E|X_i|^{p_1} < \infty$,且本文无需对混合速度附加条件 $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(i) < \infty$.且讨论的是比 φ-混合更广泛的 d-混合序列,因此,定理 1 推广和改进了文献[2].

定理 1、2 及推论类似于独立同分布序列的 Marcinkiewicz 强大数律,因此,它们是 Marcinkiewicz 强大数律在混合相依序列的推广.

参考文献

1 张维海. φ-mixing 序列强大数律的一个结果. 应用概率统计, 1997, (1): 53~57.

2 刘京军, 陈平炎, 甘师信. φ-混合序列的大数定律. 数学杂志, 1998, (1): 91~95.

3 邵启满. 关于 ρ-混合序列的完全收敛性. 数学学报, 1989, (3): 377~393.

4 陆传荣, 林正炎. 混合相依变量的极限理论. 北京: 科学出版社, 1997.

(责任编辑: 黎贞崇)

移动电话辐射会损伤染色体

美国无线电技术研究所、斯坦福大学、北卡罗来那州综合实验系统公司以及美国健康基金会的一项综合研究表明,经常使用移动电话可能致癌。

斯坦福大学和北卡罗来那州综合实验系统公司研究了 4 种移动电话辐射对多种动物细胞的影响,结果表明,移动电话辐射可使动物的染色体受损。

美国健康基金会从流行病学的角度对大批移动电话用户的患病模式进行了统计调查分析,结果发现,经常使用移动电话的人比不使用移动电话的人患神经细胞癌的危险多 3 倍。另一项研究结果还表明,右手使用移动电话的人患脑瘤的部位多在右部,但这种现象与左撇子脑瘤患者无关。

美国一些有关的机构和专家呼吁,必须继续加强这一方面的深入研究。专家建议使用耳机式听话筒,避免手机与头部接触,以减少辐射。

(摘自《科技日报》1999 年 5 月 27 日)