DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.03.001

广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (3): 161～ 164

复对称鞅的 q 均方函数与复拟 Banach空间的 PL一致凸性*

Uniformly PL-convex Property for Complex Quasi-Banach Space and q-mean Square Function of Symmetric Complex Martingales

魏文展

Wei Wenzhan

(广西师范学院数学系　南宁市明秀东路 19号　530001)

(Dept. of Math., Guangxi Teachers College, 19 East Mingxiulu, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要　在通常的概率空间上考虑一种复对称鞅,应用它的 q均方函数的 a. e. 有限性,弱 (1, 1)型,强 (p,p)型,H函数不等式,以及它的增长速度给出值空间的 PL一致凸性的刻划.

关键词　复拟 Banach空间　复对称鞅　q均方函数　PL一致凸性

中图法分类号　O 211.4

Abstract　A symmetric complex martingales was discussed on general probability space. Appling a. e. finitely, weak type (1, 1), strong type (p,p), H-inequalites and growth velocity of q-mean square function of symmetric complex martingales, we characterized uniformly PL-convex property for complex quasi-Banach space.

Key words　complex quasi-Banach space, symmetric complex martingale, q-mean square function, uniformly PL-convex

Banach空间值鞅论中一个饶有兴趣的问题是研究鞅的收敛性质或者强弱大数定律与 Banach空间几何性质的关系. Hoffmann-Jørgensen与 Pisier[1]曾经应用 0均值独立增量鞅的不等式和大数定律刻划 Banach空间的型和余型, Pisier[2], Woyczynshi[3]等还分别研究过 B值鞅的各种类型的大数定律与 Banach空间的光滑性的关系. 1984年 Davis, Garling, Tomczak-Jaegermann[4]研究了复空间的 PL一致凸性并且应用在其中取值的一类特殊鞅(所谓 Hp-shurb)的不等式予以刻划. 文献 [5] 则在通常的概率空间上定义了一种复对称鞅,采用了与原有定义等价的“四点型” PL凸性定义,证明了等价赋范定理. 本文进一步研究复对称鞅的 q均方函数,应用它的 a.e. 有限性,弱 (1, 1)型,强 (p,p)型,H函数不等式以及它的增长速度给出值空间 PL一致凸性的刻划.

1 基本定义与复对称鞅不等式

定义[5]　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是复拟 Banach空间, $(\mathrm{K},\mathscr{B},\mathrm{D})$ 为任一概率空间,称 X值适应序列 $(F_n, \mathscr{B}_n, n\geqslant 0)$ 是复对称鞅,简记为 $F=(F_n)$,若 $\mathscr{B}_n$ 是递增的纯原子 e代数序列,并且对于每个集合 $A=\{F_{n-1}(\mathrm{k})=x_1\}$,有某个 $x_2\in X$,使得 $P(dF_n=\pm x_2, \pm ix_2)=\frac{1}{4}P(A)$. 其中 $dF_n=F_n-F_{n-1}, n\geqslant 1, F_0=0$为 $F=(F_n)$的鞅差,记 $dF=(dF_n)$. F的 q均方函数记为 $S^{(q)}(F)$,即

$$S^{(q)}(F)=\sup_n S_n^{(q)}(F),$$

$$S_n^{(q)}(F)=\left(\sum_{i=1}^{n}\|dF_i\|^q\right)^{1/q},$$

此外,对于 $F=(F_n)$,记 $\|F\|_p=\sup_n\|F_n\|_p$.

关于复空间 X PL一致凸与 q-PL一致凸的定义见文献 [5]. X是 q-PL一致可凸的意思是存在着等价范数使 X成为 q-PL一致凸的.

引理 1[5]　复拟 Banach空间 X是 q-PL一致可凸的当且仅当存在常数 $C>0$,使得每个 X值复对称鞅 $F=(F_n)$ 满足

$$\|S^{(q)}(F)\|_q\leqslant C\|F\|_q. \qquad (1)$$

本节利用停时和好 λ不等式方法证明了以下定理

定理 1　设 X是复拟 Banach空间, $2\leqslant q<\infty$,则以下条件等价:

1999-02-14收稿, 1999-04-08修回。

* 广西自然科学基金资助项目 (9711006).

(Ⅰ) X 是 q-PL一致可凸空间;

(Ⅱ) 对于每个 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$,若 $\|F\|_1<\infty$,则 $S^{(q)}(F)<\infty$ a. e.;

(Ⅲ) $S^{(q)}(\cdot)$ 在复对称鞅上是弱 (1, 1) 型算子,即存在 $C>0$ 使得每个复对称鞅 F 满足

$$\lambda P(S^{(q)}(F)>\lambda)\leqslant C\|F\|_1; \tag{2}$$

(Ⅳ) $S^{(q)}(\cdot)$ 是强 (p,p) 型算子,即对于 $1<p<\infty$,有 $C_p>0$ 使每个复对称鞅 F 满足

$$\|S^{(q)}(F)\|_p\leqslant C_p\|F\|_p; \tag{3}$$

(Ⅴ) 若 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一般 Φ 函数,$\Phi(t)$ 单调增加连续,$\Phi(0)=0$,限制增长,则存在 $C_\Phi>0$ 使得每个复对称鞅 F 满足

$$E\Phi(S^{(q)}(F))\leqslant C_\Phi E\Phi(F^*),$$

当 Φ 为严格凸时,有

$$\|S^{(q)}(F)\|_\Phi\leqslant C_\Phi\|F\|_\Phi, \tag{4}$$

这里 $F^*(\omega)=\sup_n F_n^*(\omega)$,$F_n^*(\omega)=\sup_{n\geqslant k}\|F^*(\omega)\|$. $\|F\|_\Phi=\sup_n\|F_n\|_\Phi$ 为 Orlicz范数 .

引理 2 若 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$ 满足 $\|F\|_1<\infty$ 和 $P(S^{(q)}(F)=\infty)>0$,则存在另一 X 值复对称鞅 $\tilde F$,$\tilde F$ 是一致有界的并且

$$P(S^{(q)}(\tilde F)=\infty)\geqslant\frac{1}{2}P(S^{(q)}(F)=\infty). \tag{5}$$

证明 记 $A=\{S^{(q)}(F)=\infty\}$,则由 Doob极大不等式

$P(F^*>\lambda)\leqslant\frac{C}{\lambda}\|F\|_1$,取 λ 使得 $P(F^*>\lambda)<\frac{1}{2}P(A)$. 定义

$$A_k=\{\|F_i\|\leqslant\lambda,1\leqslant i\leqslant k-1,\|dF_j\|\leqslant2\lambda,1\leqslant j\leqslant k\},$$

$$u_k=\chi_{A_k},\tilde F_n=\sum_{k=1}^n u_k dF_k,\tilde F=(\tilde F_n);$$

则有 $\|\tilde F_n\|\leqslant3k\lambda$,注意到 $(u_k,k\geqslant1)$ 是可料序列,故 $\tilde F$ 仍是一个有界的 X 值复对称鞅 . 另一方面,

$$P(S^{(q)}(\tilde F)=\infty)\geqslant P(S^{(q)}(\tilde F)=S^{(q)}(\tilde F),S^{(q)}(F)=\infty),$$

$$P(S^{(q)}(\tilde F)\neq S^{(q)}(F),S^{(q)}(F)=\infty)\leqslant P(F^*>\lambda,S^{(q)}(F)=\infty)\leqslant\frac{1}{2}P(A).$$

所以 $P(S^{(q)}(\tilde F)=\infty)\geqslant\frac{1}{2}P(A)$.

定理 1的证明 (Ⅰ)⇒(Ⅱ) 根据引理 1,存在 $C>0$ 使得对每个 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$,

$$\|S^{(q)}(F)\|_q\leqslant C\|F\|_q,$$

由此,若 $\|F\|_\infty<\infty$,则 $S^{(q)}(F)<\infty$ a. e. 再利用引理 2,若 $\|F\|_1<\infty$,则 $S^{(q)}(F)<\infty$ a. e..

(Ⅱ)⇒(Ⅲ) 由 (Ⅱ) 可得: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $\|F\|_1<\delta$ 时,

$$P(S^{(q)}(F)\geqslant\varepsilon)<\varepsilon, \tag{6}$$

若不然,存在 $\varepsilon_0>0$ 和 X 值复对称鞅列 $F^{(k)}$,$k=1,2,3,\cdots$,$\|F^{(k)}\|_1<2^{-k}$,但 $P(S^{(q)}(F^{(k)})\geqslant\varepsilon_0)\geqslant\varepsilon_0$. 记 $F^{(k)}=(F_n^{(k)})$,不妨设每个 $F_0^{(k)}=0$,对应的 σ代数序列为 $(\mathscr{B}_{kn})$,则存在自然数 n_k 使得

$$P(S_{n_k}^{(q)}(F^{(k)})\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2})\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2},$$

不妨设 $\mathscr{B}_{k\infty}=\bigvee_{n=1}^\infty\mathscr{B}_{kn}$,$(k\geqslant1)$ 彼此独立,考虑鞅差序列

$$(dF_{11}^{(1)},\cdots,dF_{n_1}^{(1)},dF_{21}^{(2)},\cdots,dF_{n_2}^{(2)},dF_{31}^{(3)},\cdots),$$

记对应的鞅为 $\tilde F=(\tilde F_n)$,一方面 $\tilde F=(\tilde F_n)$ 仍为 X 值复对称鞅且 $\|\tilde F\|\leqslant\sum_{k=1}^\infty\|F^{(k)}\|\leqslant\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}=1$. 为了方便,在这里和下面假定在拟范数定义中的 $k=1$[5],否则利用等价 p范数可得出所要的结果 . 另一方面,令 $A_k=\{S_{n_k}^{(q)}(F^{(k)}>\frac{\varepsilon_0}{2})\}$,则 $\sum_{k=1}^\infty P(A_k)=\infty$,应用 Borel– Cantelli引理知道 $P(A_k,i,o)=1$,由此知几乎处处有 $S^{(q)}(\tilde F)=\infty$. 此与 (Ⅱ) 矛盾 .

由 (6) 式不难推出: $\exists C>0$,使得若对任何 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$ 有

$$S^{(q)}(F)>1\text{ a. e.},\text{则 }\|F\|_1\geqslant C. \tag{7}$$

下面证明对任何 X 值复对称鞅 F,有

$$CP(S_k^{(q)}(F)>2)\leqslant\|F\|_1, \tag{8}$$

然后以 $2\lambda^{-1}F$ 代替 F,C^{-1} 代替 C 即得 (2) 式 .

设 $P(S_k^{(q)}(F)>2)>0$,取与 F 同分布彼此独立的复对称鞅 $F^{(j)}(j=1,2,\cdots)$,记

$$A_j=\{S_k^{(q)}(F^{(j)})>2\},u_j=\chi_{A_j^c},$$

这里 $\chi_{A_j^c}$ 是集合 A_j^c 的特征函数,A_j^c 是 A_j 的余集 . 此时

$$Eu_j=P(S_k^{(q)}(F^{(j)})\leqslant2)=P(S_k^{(q)}(F)\leqslant2)<1.$$

注意由鞅差序列范数的可料性,u_j 是可料序列,定义鞅差序列

$$(dF_1^{(1)},dF_2^{(1)},\cdots,dF_k^{(1)},u_1dF_1^{(2)},\cdots,u_1dF_k^{(2)},u_1u_2dF_1^{(3)},\cdots),$$

相应的鞅记为 $\tilde F=(\tilde F_n)$,则 $\tilde F$ 是复对称鞅,由独立性

$$E\|\tilde F_{kj}\|=E(1+u_1+u_1u_2+\cdots+u_1u_2\cdots u_{k-1})E\|F_k^{(j)}\|\leqslant(1-Eu_1)^{-1}E\|F_k^{(j)}\|=P(S_k^{(q)}>2)^{-1}E\|F_k^{(j)}\|,$$

于是

$$P(S_k^{(q)}(F)>2)\|\tilde F_{kj}\|\leqslant\|F_k^{(j)}\|_1, \tag{9}$$

注意到 $\sum_{k=1}^\infty P(A_k)=\infty$,由 Borel–Cantelli引理 $P(A_k,i,0)=1$,这说明 $S^{(q)}(\tilde F)>1$ a. e.,由 (7) 得到 $\|\tilde F_{kj}\|$

$\geqslant C$,从而由(9)式得到(8)式.

(III)$\Rightarrow$(IV)对任意的$\lambda > 0$,$\delta > 0$和$\beta > \delta + 1$,定义停时

$$\mu = \inf\{n, S_n^{(q)}(F) > \lambda\}, \tag{10}$$

$$\nu = \inf\{n, S_n^{(q)}(F) > \beta\lambda\},$$

$$\sigma = \inf\{n, \| F_n \| \vee \| dF_{n+1} \| > \delta\lambda\},$$

约定$\inf \Phi = \infty$. 记$A_k = \{\mu < k \leqslant \nu \wedge \sigma\}$,$u_k = I_{A_k}$,由于$F$是$X$值复对称鞅,$(u_k)$是可料序列,令

$$\tilde{F}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k dF_k, (\tilde{F} = \tilde{F}_n), \tag{11}$$

注意当$u_n = 1$时,$k \in \{\mu < n \leqslant \nu \wedge \sigma\} = \{\mu < n\} \cap \{n \leqslant \nu \wedge \sigma\}$此时存在$k_0$,$1 \leqslant k_0 < n$,$k \overline{\in} A_{k_0}$,$k \in A_{k_0 - 1}$,从而

$$\tilde{F}_n = \sum_{k=k_0+1}^{n} dF_k = F_n - F_{k_0} = F_{n-1} + dF_n - F_{K_0},$$

由σ的定义和$n \leqslant \sigma$可以得到

$$\| \tilde{F}_n \| \leqslant \| F_{n-1} \| + \| dF_n \| + \| F_{k_0} \| \leqslant 3\delta\lambda,$$

从而

$$E \| \tilde{F}_n \| \leqslant 3\delta\lambda P(\mu < \infty) = 3\delta\lambda P(S^{(q)}(F) > \lambda), \tag{12}$$

但在$\{\nu = n, \sigma = \infty\}$上,$F^* \leqslant \delta\lambda$,$d^*(F) \leqslant \delta\lambda$,并且对上述$k_0$,$E\, k_0 - 1 < \mu$,从而

$$S_n^{(q)}(\tilde{F})^q = \sum_{k=1}^{n} \| u_k dF_k \|^q = \sum_{k=1}^{n} \| dF_k \|^q - \| dF_{k0} \|^q - \sum_{k=1}^{k_0-1} \| dF_k \|^q \geqslant (\beta - \delta - 1)\lambda^q,$$

于是

$$\{\nu = n, \sigma = \infty\} \subset \{S_n^{(q)}(\tilde{F})^q \geqslant (\beta - \delta - 1)\lambda^q\},$$

或者进一步地

$$\{S^{(q)}(F) > \beta\lambda, F^* \vee d^*(F) \leqslant \delta\lambda\} \subset \{S_n^{(q)}(\tilde{F})^q \geqslant (\beta - \delta - 1)\lambda^q\}, \tag{13}$$

将(2)应用于$(\tilde{F}_n)$,则(12)、(13)给出

$$P(S^{(q)}(F) > \beta\lambda, F^* \vee d^*(F) \leqslant \delta\lambda) \leqslant P(S^{(q)}(\tilde{F})^q \geqslant (\beta - \delta - 1)\lambda^q \leqslant (\beta - \delta - 1)^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1} L \sup_n E \| \tilde{F}_n \| \leqslant 3\delta L(\beta - \delta - 1)^{-\frac{1}{2}} P(S^{(q)}(F) > \lambda),$$

于是

$$P(S^{(q)}(F) > \beta\lambda) \leqslant P(F^* \vee d^*(F) > \delta\lambda) + P(S^{(q)}(F) > \beta\lambda, F^* \vee d^*(F) \leqslant \delta\lambda) \leqslant P(F^* \vee d^*(F) > \delta\lambda) + 3\delta(\beta - \delta - 1)^{-\frac{1}{2}} P(S^{(q)}(F) > \lambda), \tag{14}$$

此即关于$(S^{(q)}(F), F^* \vee d^*(F))$的好$\lambda$不等式,取$\Phi(t) = t^p$,则由文献[5]引理7给出

$$ES^{(q)}(F)^p \leqslant CE(F^* \vee d^*(F))^p \leqslant CE(F^*)^p \ (0 < p < \infty),$$

当$1 < p < \infty$时,则Doob不等式得到

$$\| S^{(q)}(F) \|_p \leqslant C_p \| F \|_p.$$

(IV)$\Rightarrow$(I)可由引理1得到.

为证(III)$\Rightarrow$(V),由(III)我们已经得到好λ不等式(14),应用上面提到的文献[5]引理7可得

$$E\Phi(S^{(q)}(F)) \leqslant LE\Phi(F^* \vee d^*(F)) \leqslant LE\Phi(3F^*),$$

利用Φ的限制增长性得

$$E\Phi(S^{(q)}(F)) \leqslant CE\Phi(F^*),$$

设$\| F^* \|_\Phi = 1$,此时$E\Phi(F^*) \leqslant \| F^* \|_\Phi$,故有

$$\| S^{(q)}(F) \|_\Phi \leqslant 1 + E\Phi(S^{(q)}(F)) \leqslant 1 + CE\Phi(F^*) \leqslant 1 + C,$$

由$\| F \|_\Phi$的齐性得出

$$\| S^{(q)}(F) \|_\Phi \leqslant (1 + C) \| F^* \|_\Phi = C'_\Phi \| F^* \|_\Phi,$$

若Φ还是严格凸的,则由Doob不等式得

$$\| S^{(q)}(F) \|_\Phi \leqslant C_\Phi \| F \|_\Phi.$$

(V)$\Rightarrow$(II)由(V)知,对每个X值复对称鞅F,若$\| F \|_\infty$,则$S^{(q)}(F) < \infty$ a.e.,再利用引理2即得(II).定理得证.

2 q均方函数的增长速度

本节研究X值复对称鞅的q均方函数的增长速度并用以刻划值空间的q-PL一致凸性.

定理2 设X是复拟Banach空间,$2 \leqslant q < \infty$,则以下条件等价:

(I)X同构于q-PL一致凸空间;

(II)每个X值复对称鞅$F = (F_n)$,当$\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \frac{dF_k}{k} \|^q < \infty$ a.e.时,有$n^{-1} S_n^{(q)}(F) \to 0$ a.e.$(n \to \infty)$;

(III)每个X值复对称鞅$F = (F_n)$,当$\sup_n E \| \sum_{k=1}^{n} \frac{dF_k}{k} \|^q < \infty$时,有$n^{-1} S_n^{(q)}(F) \to 0$ a.e.$(n \to \infty)$.

上述极限a.e.收敛换为依概率收敛结论仍成立.

证明 (I)$\Rightarrow$(II)考虑X值复对称鞅$\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$,$\tilde{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{dF_k}{k}$,$n \geqslant 1$,其中$F = (F_n)$为$X$值复对称鞅.对于$\lambda > 0$,定义停时

$$\tau = \inf\{n, \| \tilde{F}_n \| + \| d\tilde{F}_{n+1} \| > \lambda\}, \inf \Phi = \infty,$$

注意 $F^{(\tau)} = (F_{\tau\wedge n})$ 仍为复对称鞅,由 X 的 q-PL一致可凸性,存在 $C_q > 0$,使得

$$E\sum_{n=1}^{\tau_\lambda}\|dF_n\|^q = ES_{\tau_\lambda}^{(q)}(\tilde F)^q \leqslant C_q^q \sup_n E\|\tilde F_{\tau_\lambda\wedge n}\|^q$$

$$= C_q^q E\|\tilde F_{\tau_\lambda}\|^q \leqslant C_q^q\lambda^q < \infty,$$

换而言之

$$E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|dF_n\, \mathrm{i}_{\{\tau_\lambda\geqslant n\}}\|^q}{n^q} < \infty \text{ ,从而}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|dF_n\, \mathrm{i}_{\{\tau_\lambda\geqslant n\}}\|^q}{n^q} < \infty \text{ a.e.},$$

特别地,在集合 $\{\tau=\infty\} = \{\|\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}dF_n\| \leqslant \lambda\}$ 上,
$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q}\|dF_n\|^q < \infty$ a.e., 由 Kronecher 引理, $n^{-1}S^{(q)}(F) \to 0\ (n\to\infty)$,由 λ 的任意性与

$$\sup_n(\|\tilde F_n\| + \|dF_{n+1}\|) \leqslant 3\sup_n\|\sum_{k=1}^n k^{-1}dF_k\| < \infty \text{ a.e.},$$

最后得 $n^{-1}S^{(q)}(F) \to 0$ a.e. $(n\to\infty)$;

(II)⇒(III) 是显然的;

(III)⇒(I) 设每个满足 (III) 的复对称鞅都有 $n^{-1}S^{(q)}(F) \to 0$ 依概率收敛. 根据定理 1及引理 2,只需证明对于任何 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$,当 $\|F\|_\infty < \infty$ 时,有 $S^{(q)}(F) < \infty$ a.e.,为此考虑两种 X 值复对称鞅空间:

$$\begin{cases} \_{}_0 = \{F=(F_n), \sup_n\|\sum_{k=1}^n k^{-1}dF_k\|_\infty < \infty\}, \\ \_{}_1 = \{F=(F_n), n^{-1}S^{(q)}(F) \to 0 \text{依概率成立}\}, \end{cases} \tag{15}$$

例行的验证表明 $\_{}_0$ 是以 $\sup_n\|\sum_{k=1}^n k^{-1}dF_k\|_\infty$ 为拟范数的拟 Banach空间,$\_{}_1$ 是以

$$d(F,G) = \sup_n\int_K \frac{|S_n^{(q)}(F) - S_n^{(q)}(G)|}{n + |S_n^{(q)}(F) - S_n^{(q)}(G)|}\mathrm{d}P \tag{16}$$

为度量的拟 Frecher空间,条件 (III) 蕴含 $\_{}_0 \subset \_{}_1$,此外容易验证恒等算子 I:$\_{}_0 \to \_{}_1$ 有闭图像,从而 I 是连续线性算子.(在这类空间上的闭图像定理已得到证明). 于是,对于任何 $X > 0$,存在 $W > 0$,使得当 $\sup_n\|\sum_{k=1}^n k^{-1}dF_k\|_\infty < W$ 时,

$$\sup_n\int_K \frac{S_n^{(q)}(F)}{n + S_n^{(q)}(F)}\mathrm{d}P = d(F,0) < \frac{X}{1+X},$$

或者由明显的不等式得出

$$\sup_n\left(\frac{S_n^{(q)}(F)}{n} > X\right) \leqslant \frac{1+X}{X}\sup_n\int_K \frac{S_n^{(q)}(F)}{n + S_n^{(q)}(F)}\mathrm{d}P < X.$$

现在设 X 值复对称鞅 $F=(F_n)$ 满足 $\sup_n\|F_n\|_q < \infty$,不妨设 $\sup_n\|F_n\|_q < W$,令 $\tilde F = (\tilde F_n)$,$\tilde F_n = \sum_{k=1}^n k^{-1}dF_k$, $n \geqslant 1$,则 $\sup_n\|\sum_{k=1}^n k^{-1}d\tilde F_k\|_q = \sup_n\|F_n\|_q < W$,由上面所述可得

$$\sup_n P(n^{-q}\sum_{k=1}^n k^q\|dF_k\|^q > X) =$$

$$\sup_n P(n^{-1}S_n^{(q)}(\tilde F) > X) < X, \tag{17}$$

代替鞅差 $(dF_1, dF_2, \cdots)$,考虑由 $(0, 0, \cdots, 0, dF_1, dF_2, \cdots)$ 确定的鞅,则 (17) 式成为

$$P((n+k)^{-q}\sum_{j=1}^n (j+k)^q\|dF_j\|^q > X) < X,$$

k 是任意的,令 $k\to\infty$,则由此式得到

$$P\sum_{j=1}^n\|dF_j\|^q > X) \leqslant X,$$

先由 n 的任意性,再由 X 的任意性,最后得到 $S^{(q)}(F) < \infty$ a.e..由定理 1(II) 知 X 同构于 q-PL一致凸空间. 定理得证.

参考文献

1 Hoffman-Jørgensen J, Pisier G. The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Ann Probab, 1976, 4: 587~599.

2 Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces. Isreal J Math, 1975, 20: 326~350.

3 Woyczynski W A. Geometry and martingales in Banach spaces. LNM, 1975, 472: 229~275.

4 Davis W J, Garling D J H. Tomczak-Jaegermann, The complex convexity of quasi-normed linear spaces. J Funct Anal, 1984, 55: 110~115.

5 魏文展, 刘培德. 复空间的 PL一致凸性及其鞅刻划. 科学通报, 1997, 42(3): 234~238.

6 魏文展, 李日光, 元昌安. 复拟 Banach空间的 PL一致光滑性及其鞅刻划. 数学杂志, 1998, 18(3): 321~332.

(责任编辑: 黎贞崇)