DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (3): 170~173

估计多色 Ramsey数下界的一个算法*

An Algorithm for Estimating Lower Bounds of Multicolor Ramsey Numbers

苏文龙　　罗海鹏**　　李桂清***
Su Wenlong　　Luo Haipeng　　Li Guiqing

(广西计算中心　南宁市星湖路 32号　530022)
(Guangxi Computer Center, 32 Xinghulu, Nanning, Guangxi, 530022, China)

摘要　提出了计算经典多色 Ramsey数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$下界的一个算法,得到 3个 4色 Ramsey数新的下界: $R(3,3,3,20)\geqslant 912$, $R(3,3,3,21)\geqslant 938$, $R(3,3,3,22)\geqslant 992$.
关键词　多色 Ramsey数　下界　循环图　算法
中图法分类号　O 157.5

Abstract　An Algorithm to compute lower bounds of classical multicolor Ramsey numbers $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ is developed. Three new lower bounds were obtained: $R(3,3,3,20)\geqslant 912$, $R(3,3,3,21)\geqslant 938$, $R(3,3,3,22)\geqslant 992$.
Key words　multicolor Ramsey number, lower bound, circulant graph, algorithm

多色 Ramsey数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是具有下述性质的最小正整数 r: 用 $n(n\geqslant 3)$种颜色把 r阶完全图 K_r的边任意染色后,K_r中一定存在单色的 K_{q_i},这里 i是 $1,2,\cdots,n$中的某一个.

除了早已证明的存在性外,人们对函数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$所知极少.就数值而言,迄今只知道唯一的一个准确值 $R(3,3,3)=17$[1];在确定其数值方面,近三十多年来各国学者的主要工作是借助计算机得到一些界,例如

$30\leqslant R(3,3,4)\leqslant 31$[2,3],
$45\leqslant R(3,3,5)\leqslant 57$[4~6],
$55\leqslant R(3,4,4)\leqslant 79$[5,6],
$87\leqslant R(3,3,3,4)\leqslant 155$[6,7],
$80\leqslant R(3,4,5)\leqslant 161$[6,7],

我们也曾给出

$458\leqslant R(4,4,4,4)$[8],
$90\leqslant R(3,3,9)$[9],
$108\leqslant R(3,3,11)$[10],

详见权威的综述文章 [11]及所附的参考文献.

鉴于多色 Ramsey数的研究如此困难,本文提出了一个算法,利用素数阶循环图得到了 3个多色 Ramsey数的新下界:

定理 1　$R(3,3,3,20)\geqslant 912$, $R(3,3,3,21)\geqslant 938$, $R(3,3,3,22)\geqslant 992$.

1　素数阶循环图的同构变换

给定整数 $n\geqslant 3$和素数 $p=2m+1$,记 $Z_p=\{-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,m\}=[-m,m]$(对于整数 $s\leqslant t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$).以下除非另有说明,所有整数及其运算结果都理解为模 p后属于 Z_p,并用通常的等号"="表示"模 p相等".

定义 1　对于集合 $S=[1,m]$的一个 n部分拆 $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$,设 p阶完全图 K_p的顶点集 $V=Z_p$,其边集 E是 Z_p的所有 2元子集的集且有分拆

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\ E_i=\{(x,y)\in E:|x-y|\in S_i\}.$$

把 E_i中的边叫做 S_i色的,记 K_p中 S_i色边所导出的子图为 $G_p(S_i)$, $i\in[1,n]$.于是我们按照参数集合 $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$把 K_p的边 n-染色,简记为 $G_p(S)$.

引理 1　设 g是 p的一个原根,则对于任意 j, $b\in Z_p$, Z_p到自身的线性变换 $f: x\mapsto g^jx+b$是 $G_p(S)$的同构变换:

$$f: G_p(S)\mapsto G_p(S^*)\text{ 并且 }G_p(S_i)\mapsto G_p(S_i^*),$$

$$S^*=\bigcup_{i=1}^{n}S_i^*,\ S_i^*=\{|g^jx|: x\in S_i\}.$$

1998-10-12收稿.
* 广西科学基金资助项目 (桂科回字 9817143).
** 广西科学院,南宁市江南路西一里 20号, 530031 (Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031).
*** 中国科学院计算机研究所,北京, 100080 (Institute of Computer, China Academy of Sciences, Beijing, 100080).

证　对于任意 $x,y\in Z_p$，恒有

$f(x)-f(y)=g^j(x-y)$.

即得 $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ 并且有

$|x-y|\in S_i\Leftrightarrow|f(x)-f(y)|=|g^j(x-y)|\in S_i^*$，$i\in[1,n]$.

因此 f 是顶点集 V 的 1－1 变换，且把 $G_p(S)$ 的 S_i 色边变换成 $G_p(S^*)$ 的 S_i^* 色边，即得引理 1 的结论．//

图 $G_p(S)$，从而每个 $G_p(S_i)$ $(i\in[1,n])$，是一类特殊的 Cayley 图，称为循环图 (circulant graphs)．按照定义 1，图 $G_p(S)$ 有分拆 $G_p(S)=\bigcup_{i=1}^{n}G_p(S_i)$，根据 Ramsey 数的定义即得

定理 2　记图 $G_p(S_i)$ 的团数为 $c_i=c(G_p(S_i))$，$i\in[1,n]$，则有

$R(c_1+1,c_2+1,\cdots,c_n+1)\geqslant p+1$. //

2 图 $G_p(S)$ 的团和团数

对于任意 $i\in[1,n]$，考察 $G_p(S_i)$ 的团和团数．我们知道循环图是顶点可迁的，因此 $G_p(S_i)$ 的团数等于 $G_p(S_i)$ 中含顶点 0 的团的最大阶，我们只须考察含顶点 0 的团．据定义 1 知这样的团的其他非零顶点是集合 $A_i=\{x:|x|\in S_i\}$ 的元．故有

引理 2　记 $A_i=\{x:|x|\in S_i\}$．在图 $G_p(S_i)$ 中记顶点集为 A_i 的导出子图为 $G_p[A_i]$，$G_p[A_i]$ 的团数为 $[A_i]$，则有

$G_p(S_i)$ 的团数 $=[A_i]+1$. //

于是求 $G_p(S_i)$ 的团数就转化为求 $G_p[A_i]$ 的团数．为了求得 $G_p[A_i]$，引进 A_i 的一种全序．

定义 2　设 $x\in A_i$，记

$d_i(x)=|\{y\in A_i:|y-x|\in S_i\}|$.

在 A_i 上的序 $\prec$ 规定如下：

(1) A_i 中的二元子集 $\{a,-a\}$ 对于序 $\prec$ 构成区间，并且 $a\in S_i\Leftrightarrow a\prec -a$.

(2) 对于 A_i 中分属不同的二元子集的元 $x\in\{a,-a\}$ 和 $y\in\{b,-b\}$，规定 $x\prec y$ 当且仅当 $d_i(x)<d_i(y)$，或 $d_i(x)=d_i(y)$ 但 $a<b$，其中 $a,b\in S_i$.

注意到 A_i 的二元子集 $\{a,-a\}$ 中有且仅有一个元属于 S_i，并且

$y\in A_i,|y-a|\in S_i\Leftrightarrow -y\in A_i,|-y+a|\in S_i$.

即 $d_i(a)=d_i(-a)$，由此易知上述 $\prec$ 是明确定义的，并且 $(A_i,\prec)$ 是全序集．$x\prec y$ 称为 x 前于 y 或 y 后于 x.

定义 3　全序集 $(A_i,\prec)$ 上的长为 $k(k\geqslant 1)$ 的链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 称为起点是 x_0 的 (S_i 色的) 链，如果对于 $0\leqslant h<j\leqslant k$ 有 $|x_h-x_j|\in S_i$．起点是 x_0 的链的最大长记为 $l_i(x_0)$．如果上述起点是 x_0 的长为 $k\geqslant 1$ 的链不存在，就记 $l_i(x_0)=0$.

引理 3　$[A_i]=1+\max\{l_i(a):a\in S_i\}$.

证　设 $[A_i]=1$，即对于任意 $a\in S_i$ 与 $y\in A_i$ 恒有 $|y-a|\notin S_i$，据定义 3 有 $l_i(a)=0$，此时就有 $\max\{l_i(a):a\in S_i\}=0$，引理 3 成立．

以下考察 $[A_i]=1+k(k\geqslant 1)$ 的情形．据定义 3 可知链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 的 $k+1$ 个元构成 $G_p[A_i]$ 的一个团，即得 $[A_i]\geqslant 1+\max\{l_i(a):a\in S_i\}$．下面再证 $[A_i]\leqslant 1+\max\{l_i(a):a\in S_i\}$.

设 $[A_i]=1+k\geqslant 2$．则 $G_p[A_i]$ 中有 $k+1$ 个顶点的团．把这 $k+1$ 个顶点按 $\prec$ 排序后得 $(A_i,\prec)$ 上的长为 k 的链，再在所有 $(A_i,\prec)$ 上的长为 k 的链中取起点按 $\prec$ 来说最前面的一条，记为 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$．我们断言一定有 $x_0\in S_i$.

假设不然，即 $-x_0\in S_i$．由于 g 是 p 的原根有 $g^{2m}=1$ 但 $g^m\neq 1$，从而有 $g^m=-1$．在引理 1 中令 $j=m,b=0$ 则变换 $f:x\mapsto -x$ 是 $G_p(S_i)$ 的自同构，从而 f 也是 $G_p[A_i]$ 的自同构，它把 $G_p[A_i]$ 中 $k+1$ 个顶点的团 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 变换成 $G_p[A_i]$ 中另一个团 $-x_0,-x_1,\cdots,-x_k$．据定义 3 知这 $k+1$ 个元 $-x_0,-x_1,\cdots,-x_k$ 在 $(A_i,\prec)$ 上构成长为 k 的链．由定义 2 所规定的全序集 $(A_i,\prec)$ 的排序方式并注意到 $d_i(x)=d_i(-x_i)(x\in A_i)$ 可知这条链可表示为 $-x_0\prec -x_1\prec\cdots\prec -x_k$，其起点 $-x_0\prec x_0$．因此原来给定的链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 不是"起点按 $\prec$ 来说最前"的一条，矛盾．于是断言 $x_0\in S_i$ 为真，从而有 $[A_i]=1+k\leqslant 1+l_i(x_0)\leqslant 1+\max\{l_i(a):a\in S_i\}$．引理 3 得证．//

注意到，如果对于 $a\in S_i$ 与任意 $y\in A_i$ 恒有 $|y-a|\notin S_i$，那么据 $d_i(a)$ 与 $l_i(a)$ 的定义就有 $d_i(a)=0$ 且 $l_i(a)=0$．根据引理 3 即得

引理 4　$\max\{d_i(a):a\in S_i\}=0\Leftrightarrow[A_i]=1$. //

3 计算多色 Ramsey 数下界的算法

上述理论为计算 $G_p(S_i)$ 的团数提供了一个新的思路．在用计算机计算循环图的团数时，通常是用深度优先搜索法 (depth-first search)，所需要的运算时间随着结点个数的增加而呈指数型的增长．由于 $|A_i|$ 远远小于 p，所以计算 $G_p[A_i]$ 的团数 (考察 $|A_i|$ 个结点) 要比计算 $G_p(S_i)$ 的团数 (要考察 p 个结点) 容易得多．另一方面，由于 $(A_i,\prec)$ 的排序方式也能够节省回溯 (backtracking) 的运算量：设 $t=|S_i|$ 并且

$$(A_i, \prec) = \{a_1, -a_1, a_2, -a_2, \cdots, a_t, -a_t\} \tag{1}$$

则有 $d_i(a_1) \leqslant d_i(a_2) \leqslant \cdots \leqslant d_i(a_t)$.除了 $d_i(a_t)=0$ 的特殊情形,一般地说 $d_i(a_1)$ 要比 $d_i(a_t)$ 小得多,此时按照定义 3依次计算 $l_i(a_1)$、$l_i(a_2)$, $\cdots$, $l_i(a_t)$就能提高运算的效率.

现在给出计算多色 Ramsey数 $R(q_1, q_2, \cdots, q_n)$的下界的一种算法,步骤如下:

1)对于给定的 $n(n \geqslant 3)$个有序的整数 $q_1, q_2, \cdots, q_n \geqslant 3$,选取适当的素数 $p=2m+1$和 $[1,m]$的一个 n部分拆 $S=[1,m]=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$,按照定义 1作图 $G_p(S)$.设 $i=1$.

2)设 $A_i=\{x: |x| \in S_i\}$.对于 $a \in S_i$,计算 $d_i(a) = |\{y \in A_i: |y-a| \in S_i\}|$.如果 $\max\{d_i(a): a \in S_i\}=0$,根据引理 4得 $[A_i]=1$,转到 6).

3)根据定义 2作全序集 $(A_i, \prec)$,设这全序集的各元排列如(1)式,令 $j=1$.

4)对于 $a_j \in S_i \cap A_i$,根据定义 3作起点为 a_j的链.如果存在一条长为 $k \geqslant q_i-2$的起点为 a_j的链,运算结束;否则,根据定义 3有 $l_i(a_j) \leqslant q_i-3$.

5)令 $j=j+1$.如果 $j \leqslant |S_i|$,转到 4);否则,根据引理 3有

$$[A_i]=1+\max\{l_i(a): a \in S_i\} \leqslant q_i-2.$$

6)令 $i=i+1$.如果 $i \leqslant n$,转到 2);否则,对于 $i \in [1,n]$有 $[A_i] \leqslant q_i-2$.

7)根据引理 2,得到 $G_p(S_i)$的团数 $=[A_i]+1 \leqslant q_i-1$,其中 $i \in [1,n]$.根据定理 2,得到

$$R([A_1]+2, [A_2]+2, \cdots, [A_n]+2) \geqslant p+1.$$

上述算法中的第 1)步是给定初始数据,此后计算机可按预先设计好的程序自动完成算法的整个过程.显然只有输入经过精心设计的初始数据,才能进入算法的最后一步成功地得到一个待定的多色 Ramsey数的下界;否则,算法的过程将在第 4)步结束运算,此时可以考虑更新初始数据进行新一轮的运算.

上述算法是行之有效的.下述例子得到迄今最好的下界 $R(3,3,4) \geqslant 30$.

例 $R(3,3,4) \geqslant 30$.

证明 取 $n=3, q_1=q_2=3, q_3=4$.选定素数 $p=29$和 $[1,14]$的一个 3部分拆 $S=[1,14]=S_1 \cup S_2 \cup S_3$,其中

$S_1=\{1,4,10,12\}$

$S_2=\{2,5,6,14\}$

$S_3=\{3,7,8,9,11,13\}$

根据算法的第 2)步,当 $i=1,2$时有

$\max\{d_i(a): a \in S_i\}=0$.

故有 $[A_1]=[A_2]=1$.当 $i=3$时有

$(A_3, \prec)=\{7,-7,9,-9,13,-13,3,-3,8,-8,11,-11\}$.

进入算法的第 4)、5)步,得到 $\max\{l_3(a): a \in S_3\}=1$,其中长为 1的以 $a \in S_3$为起点的链,按照 $\prec$来说排列在最前面的一条为 $7 \prec -9$.故由第 5)步得到结论 $[A_3]=2$.由第 6)步进入第 7)步,就得到结论 $R(3,3,4) \geqslant 30$.

这是计算多色 Ramsey数的一个最简单的例子,按照上述极其有效的算法,甚至用手算也不会很困难.用计算机完成上述算法所需要的运算时间远远不到 1 s (CPU: Pentium 200MMX).

4 定理 1的证明

由于上述算法和所举的例子已经叙述得很具体了,而且在给定初始数据以后计算机可按预先设计好的程序自动完成算法的整个过程,因此在下述证明中我们略去算法的一些细节的叙述,仅写出构造图 $G_p(S)$的素数 p和参数集合 $S=\bigcup S_i$(注意到 $S=[1,m]$,因此我们只写出 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$而不必写出 S_n),并报告按照上述算法得到的 $[A_i]$($i \in [1,n]$)和完成算法全过程所需要的 CPU(Pentium 200MMX)时间.

1)取 $p=911$,整数 $n=4$,参数集合 $S=\bigcup_{i=1}^{4} S_i$,其中

$S_1=\{1,12,16,19,41,48,61,69,72,78,83,86,100,103,108,129,132,135,143,146,157,160,168,185,188,195,223,225,228,230,245,248,250,280,282,304,307,310,312,315,318,332,335,340,361,367,389,392,400,424,427,429,449,452,454\}$,

$S_2=\{3,4,9,10,15,22,33,34,51,52,57,58,70,76,77,82,105,106,118,124,125,144,145,171,172,173,190,191,192,198,217,218,219,237,238,257,264,265,284,285,292,311,328,351,352,357,358,359,376,377,378,394,395,406,413,418,419,420,425,426,431,432,443,444,450\}$,

$S_3=\{2,13,29,38,44,45,53,56,60,64,65,71,75,80,96,111,122,123,126,138,147,153,163,174,181,189,196,204,205,214,220,221,229,232,236,247,251,255,272,287,290,298,302,305,313,314,324,329,338,339,356,360,364,372,375,387,390,396,397,411,415,422,430,438,448\}$.

根据上述算法，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=1$，$[A_3]=1$，$[A_4]=18$，因此有 $R(3,3,3,20)\geqslant 912$。所用的 CPU 时间为 649 753 s。

2)取 $p=937$，整数 $n=4$，参数集合 $S=\bigcup_{i=1}^{4} S_i$，其中

$S_1=\{1, 12, 14, 20, 33, 36, 46, 54, 67, 78, 80, 89, 91, 93, 102, 117, 130, 133, 146, 149, 155, 157, 159, 168, 170, 172, 181, 183, 196, 212, 236, 243, 249, 262, 271, 275, 277, 280, 293, 296, 299, 309, 315, 324, 328, 337, 341, 343, 346, 352, 354, 356, 359, 365, 396, 399, 403, 412, 425, 427, 431, 433, 438, 440, 444, 446, 459, 462\}$，

$S_2=\{7, 8, 9, 21, 23, 25, 37, 76, 92, 94, 96, 98, 110, 112, 114, 126, 127, 142, 144, 160, 171, 177, 199, 213, 215, 216, 217, 227, 229, 231, 232, 233, 244, 245, 261, 278, 294, 300, 306, 316, 318, 322, 332, 333, 334, 350, 351, 366, 367, 368, 379, 385, 395, 401, 407, 413, 417, 419, 423, 435, 437, 439, 441, 451, 452, 453, 467, 468\}$，

$S_3=\{4, 10, 11, 18, 26, 31, 34, 39, 53, 56, 61, 81, 83, 86, 103, 105, 108, 132, 140, 148, 153, 154, 173, 175, 176, 178, 195, 197, 198, 200, 203, 219, 220, 225, 247, 252, 255, 260, 267, 268, 269, 282, 290, 312, 317, 319, 339, 342, 347, 361, 362, 364, 369, 383, 389, 391, 404, 411, 426, 432, 434, 454, 456, 461\}$。

根据上述算法，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=1$，$[A_3]=1$，$[A_4]=19$，因此有 $R(3,3,3,21)\geqslant 938$。所用的 CPU 时间为 547 728 s。

3)取 $p=991$，整数 $n=4$，参数集合 $S=\bigcup_{i=1}^{4} S_i$，其中

$S_1=\{1, 8, 11, 21, 39, 46, 51, 58, 61, 68, 71, 77, 81, 87, 101, 106, 113, 118, 125, 130, 137, 143, 150, 156, 160, 163, 166, 173, 180, 185, 192, 197, 216, 222, 225, 232, 235, 242, 245, 270, 282, 289, 292, 294, 301, 304, 308, 314, 324, 337, 344, 349, 361, 374, 380, 387, 399, 404, 406, 416, 423, 428, 440, 446, 453, 456, 459, 463, 466, 478\}$，

$S_2=\{9, 17, 22, 25, 29, 30, 36, 49, 80, 83, 88, 96, 104, 128, 135, 141, 147, 148, 151, 154, 155, 162, 186, 194, 199, 202, 206, 207, 209, 213, 220, 233, 253, 254, 257, 260, 264, 265, 291, 312, 315, 318, 319, 323, 331, 339, 370, 373, 376, 378, 383, 386, 397, 410, 417, 431, 437, 441, 444, 449, 476, 488, 489, 492, 495\}$，

$S_3=\{5, 6, 31, 34, 43, 44, 45, 47, 54, 57, 64, 103, 105, 115, 122, 126, 138, 161, 177, 184, 188, 191, 200, 201, 239, 240, 249, 250, 251, 261, 263, 275, 277, 278, 279, 288, 290, 300, 302, 328, 330, 340, 348, 350, 360, 367, 369, 396, 408, 409, 419, 420, 429, 432, 448, 458, 471, 485, 487, 494\}$。

根据上述算法，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=1$，$[A_3]=1$，$[A_4]=20$，因此有 $R(3,3,3,22)\geqslant 992$。所用的 CPU 时间为 1 822 592 s。

参考文献

1 Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1~7.

2 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey theorem [Ph D thesis]. University of Waterloo, January 1966.

3 Piwakowski K, Radziszowski S P. $30\leqslant R(3,3,4)\leqslant 31$. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 1998, 27: 135~141.

4 Exoo G. Constructing Ramsey graphs with a computer. Congressus Numerantium, 1987, 59: 31~36.

5 Kreher D L, Wei Li, Radziszowski S P. Lower bounds for multi-colored Ramsey numbers from group orbits. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial computing, 1988, 4: 87~95.

6 Exoo G. On two classical Ramsey numbers of the form $R(3,n)$. SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1989, 2: 488~490.

7 Exoo G. Some new Ramsey coloing. The Electronic Journal of Combinatorics, # R29, 1998, 5.

8 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some Ramsey numbers $R_3(n)$ and $R_4(n)$. Guangxi Sciences, 1996, 3 (3): 3~7.

9 Luo Haipeng, Su Wenlong. New lower bound of classical three-color Ramsey number $R(3,3,9)$. Guangxi Computer Application, 1998, 1: 17~19.

10 Luo Haipeng, Su Wenlong. New lower bound of classical three-color Ramsey number $R(3,3,11)$. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 1998, 14 (3): 1~3.

11 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, DS1, updated on 7/9/1998.

(责任编辑：黎贞崇)