DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.03.005
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (3): 174~176

符号差类运输问题的多项式时间算法*
Polynomial-time Algorithm for Signature Class Transportation Problem

何登旭 戴祯杰**
He Dengxu Dai Zhenjie

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁市西乡塘路 530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalites, Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 给出符号差类运输问题的一个多项式时间算法,并证明该算法的时间复杂性是 $O(mn^2+m^2n)$.
关键词 运输问题 符号差 多项式时间算法
中图法分类号 O 221

Abstract We obtain an algorithm for signature class transportation problems, and turn out that the algorithm is a polynomial-time algorithm. Time complexity for the algorithm is $O(mn^2+m^2n)$.

Key words transportation problem, signature, polynomial-time algorithm

文献 [4] 中给出了运输问题有最优符号差的充分条件,并称这类运输问题为符号差类运输问题. 在本文中将给出这类运输问题的符号差算法,并证明该算法是多项式时间算法.

1 符号差类运输问题的算法

算法 1 (此处仅对行符号差给出算法,列符号差同理类推)

初始步: 计算对偶可行解 (u,v) 和初始基树 T,置 $T=$ H,$Q=R\backslash\{1\}$

① 令 $u_1=0, p=1$;

② 对每一个 $j\in C$,取 $v_j=c_{1j}$,将 $T\cup\{(1,j)\}$赋给 T;

③ 对每一个 $i\in Q$,计算$\min\limits_{j\in C}\{c_{ij}-v_j\}$,设当 $j=k$ 时取得最小,令 $u_i=c_{ik}-v_k$,用 $T\cup\{(1,j)\}$赋给 T;

④ 若 Q中结点在符号差向量中对应分量为 1,则将此结点从 Q中去除.

步骤 (1): 使目标结点减少一个或目标结点在 T 中的度数增加 1.

若 $|Q|=1$且其中结点 i在 T中的度数等于 d_i,则转至步骤 (3); 否则,任选一个目标结点 $t\in Q$为"目标",令 $s=p$, $T_1=T$,W$=0$,利用基步子树标向法在 T中标向子树 $\overleftarrow{T_1^{st}}$,并将 T_1经过标向后所得带部分有向边的树仍记为 T_1.

步骤 (2): 对偶单纯形步骤

① 选择离基边,选 s作为 T_1的根,取 $\overleftarrow{T_1^{st}}$ 中与此点相邻接指向该结点的有向边 $\overrightarrow{(s,l)}$ 为离基边,设 $\overrightarrow{T^l}$ 是 $\overrightarrow{T^{st}}-\{\overrightarrow{(s,l)}\}$ 中以 l为根的有向子树,$T^s=T_1-(\overrightarrow{T^l}\cup\{\overrightarrow{(s,l)}\})$ 是 $\overrightarrow{T_1}$ 中以 s为根的子树. (此处 T^s 当 $s=p$时为无向树,否则为有向树),令 $R^l(C^l)$与 $R^s(C^s)$是在当前 T^l 与 T^s 中行 (列) 结点集,C为当前列结点集,R为行结点集,若 $s=p$,取 $s=p$,$r_i=\infty$,对一切 $i\in R^l$;

② 选择入基边: 对每一个 $j\in C^s$,以 v_j- W赋给 v_j,对每一个 $i\in R^s$,以 u_i+ W赋给 u_i (仅当 $s=p$时进行). 对每一个 $i\in R^s$,$j\in C^s$,计算 $\text{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$,若 $\text{c}_{ij}<r_i$,以 c_{ij}赋给 r_i,以 j赋给 Col(i),计算 $\min\limits_{i\in R^l}\{r_i\}$,设其在 $i=g\in R^l$处取得,以 col(g)赋给 h,r_g- W赋给 X,r_g赋给 W;

③ 以 $(T-\{(s,l)\})\cup\{(g,h)\}$赋给 T,若 $g\notin Q$,以 g 赋给 s,以 $\overrightarrow{T_l}$ 赋给 T_1 及 T_1^{st},转至步骤 (2); 否则,对 $\forall i\in R^l$,以 u_i+ W以赋给 u_i,对 $\forall j\in C^l$,以 v_j- W赋给 v_j,若结点 g在 T中的度数等于 d_g,以 $Q-\{g\}$赋给 Q,转至步骤 (1); 若结点 g在 T中的度数小于 d_g,保持 Q不变,转至步骤 (1).

1998-06-24收稿, 1998-07-14修回稿.
* 广西区科委攻关项目资助.
** 广西教育学院数学系,南宁市建政路,530013 (Dept. of Math., Guangxi Education College, Jiangzhenglu, Nanning, Guangxi, 530013).

步骤(3): 求变量 X 的值

(a) 取不在 T 中边对应的 X 的分量为 0;

(b) 在 T 中任选一个度数为 1的结点,若此结点为行结点,设为 i,转至①,否则,转至②;

① 将与此结点相邻接的边设为 (i,l),取 $x_{il}=a_i$,以 $T-\{(s,l)\}$赋给 T,赋给 T,b_l-x_{il}赋给 b_l,若 T中无边,终止.若 T中有边,如结点 l在 T中度数为 1,赋 l给 i,转至②,否则,转至 (b);

② 将与此结点相邻接的边设为 (l,i),取 $x_{li}=b_i$,以 $T-\{(l,i)\}$赋给 T,a_l-x_{li}赋给 a_l,若 T中无边,终止.否则,如结点 l在 T中度数为 1,赋 l给 i,转至①,若结点 l在 T中度数不为 1,转至 (b).

2 算法 1是 $O(mn^2+m^2n)$ 多项式时间算法

我们先作如下定义:

定义 1 若一个结点 i在算法 1初始树 T中度数大于 d_i,则称此结点为初始源;其它源结点称为中间源.

定义 2 在运输问题符号差算法中,若经过若干次转轴后,初始源的次数减少 1,并且某个目标结点次数增加了 1,我们称此过程为一个基本符号差步骤.(此处"次数"即为定义 1的"度数")下面,我们对上述算法复杂性进行讨论.

定理 1 算法 1所需转轴次数至多为$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$.此处,设运输问题符号差为 $d=(d_1,d_2,...,d_m)$,$t=|\{i|d_i=1,1\leqslant i\leqslant m\}|$并且设 $d_1\leqslant d_2\leqslant...\leqslant d_m$.

证明 由于 $d_1\leqslant d_2\leqslant...\leqslant d_m$,从算法 1可以看出,必须经过至多 $n-2$个基本符号差步骤,而得到最优树,且仅当在下列条件下算法 1所需转轴次数最多:若 $i<j$,在结点 i的度数末达到 d_i之前,结点 j的度数不变,且每一个结点的度数增加时所需基本符号差步骤中转轴次数为此结点的序数 p减去 1.从而算法 1所需转轴次数至多为$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$.证毕.

定理 2 对于给定最优符号差为 $d=(d_1,d_2,...,d_m)$的运输问题(TP$'$),$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$是最佳可能上界,即 c_{ij} $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$可取值使此界达到.此处设 $d_1\leqslant d_2\leqslant...\leqslant d_m$,$t=|\{i|d_i=1\}|$.

证明 由定理 1可知$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$是算法 1的转轴次数的上界,即至多经过$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$次转轴,可以得到满足最优符号差的最优树.要证$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$为最佳可能上界,仅需找到一个运输问题,此运输问题最优符号差 $d=(d_1,d_2,...,d_m)$,且算法 1所需转轴次数为$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$才能得到最优树.为此,我们取 $C=(c_{ij})$,其中 $c_{ij}=(m-i)(j-1)$,(这些可由最优符号差的定义保证其合理性),在此情况下,若 $i<h,j<k$,则 (i,k)和 (h,j)不可能同时含于算法进行过程中的一棵对偶可行树 T中,因为若它们均属于一棵对偶可行树 T,则 $u_i+v_k=(m-i)(k-1)$和 $u_k+v_j=(m-k)(j-1)$,从而有 $u_i+v_j\leqslant(m-i)(j-1)$及 $u_k+v_k\leqslant(m-h)(k-1)$,得到 $(m-i)(k-1)+(m-h)(j-1)\leqslant(m-i)(j-1)+(m-h)(k-1)$,即 $(m-i)(k-j)\leqslant(m-h)(k-j)$,又 $j<k$,从而 $h\leqslant i$,与 $i<h$矛盾.所以在每一步从具有符号差 a的树到具有符号 a'的树(此处 a'为由具有符号差 a的树经过一次转轴后得到的树的符号差)的转轴过程是一个"邻近转移",即 $a'_k=a_k-1$能且仅能有 $a'_{k+1}=a_{k+1}+1$或 $a'_{k-1}=a'_{k-1}+1$,因为我们是从 $(n-1,1,\cdots,1)$开始的,所以在各步骤转轴过程中,当 $k<w$时,不可能出现树 T使 T的第 k个结点的次数小于 d_k,而第 w个结点次数(即度数)大于等于 2的情形,也不可能出现第 k个结点不是源结点而经过一次转轴,第 $k+1$个结点的次数增加 1的情形,从而得到带最优符号差的树 T,所需转轴次数为$\sum_{i=1}^{m-t}(t+i-1)(d_{t+i}-1)$,其中 $t=|\{i|d_i=1\}|$.证毕.

在定理 1定理 2中,我们假设 $d_1\leqslant d_2\leqslant...\leqslant d_m$,但并不失一般性,对一般问题,我们可以对最优符号差按其分量大小由小到大重新排列,并对结点序数也作相应变化即可.

推论 1 对 m个发点,n个收点的具有最优符号差的一类运输问题,算法 1所需转轴次数至多为 $(m-1)(n-2)$.

定理 3 运输问题符号差算法为 $O(mn^2+m^2n)$多项式算法.

证明 在初始步中所需运算次数与比较次数均为 $O(mn)$,在每一基本符号差步骤中,步骤(1)所需时间复杂性至多为 $O(m+n)$,在步骤(2)中,每一条边仅需计算与比较至多一次,故至多共需时间 $O(mn)$,计算 W或 X时,至多需 $O(m^2)$时间.在步骤(3)中至多需 $O(m+n^2)$时间.由于算法至多需 $n-2$步基本符

号差运算,从而至多需时间 $O(mn)+O(m+m)(n-2)+O(mn)(n-2)+O(m^2)(n-2)+O((m+n)^2)$.所以算法复杂性为 $O(mn^2+m^2n)$.证毕.

3 应用

例 分组问题

将 n 个元素(人、货物等)分成 m 组($m\leqslant n$),第 i 组为 a_i 个元素($i=1,2,...,n$),此处 $a_i\geqslant 1$.设第 j 个元素分到第 i 组所耗费用(时间、支付等)为 c_{ij},我们要求一种分法,使所花总费用最小.

设 $x_{ij}=0$ 表示第 j 人不分到第 i 组;$x_{ij}=1$ 表示第 j 个人被分到第 i 组,则问题模型如下:

$$\min\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1,2,...,m$$

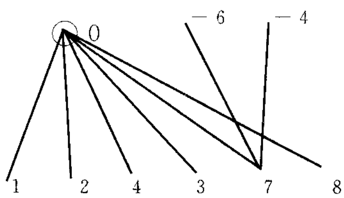
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \qquad j=1,2,...,n$$

此处 $\sum_{i=1}^{m} a_i=n, x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,...,m; j=1,...,n)$.此问题显然满足定理 1 的条件,且其一个最优符号差为 $(a_1+1,...,a_{i-1}+1,a_i,a_{i+1}+1,...a_m+1)$,$(1\leqslant i\leqslant m)$.故可用算法 1 解之.如果取 $n=6, a_1=1, a_2=3, a_3=2$,价格矩阵 C 如下:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

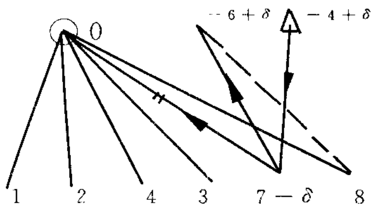
则 $d=(2,3,3)$ 为其一个最优符号差.下面利用算法 1 解此问题:

初始步:



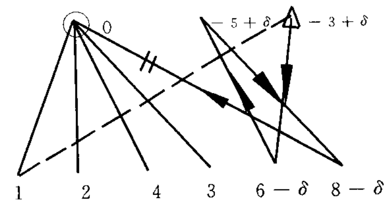
其中结点附近的数为此结点对应的对偶变量.

基本符号差步骤 1:



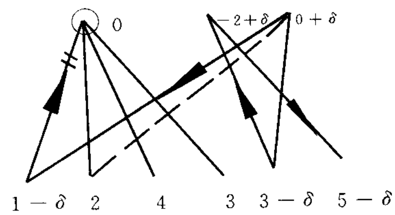
W= 1
X= W- 0= 1
虚边为入基边
带"∥"的边为离基边;

基本符号差步骤 2



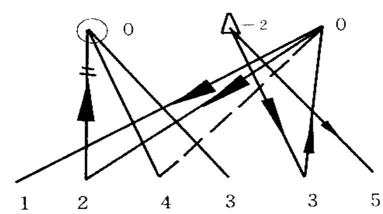
W= 3
X= W- 0= 3;

基本符号差步骤 3



W= 0
X= W- 0= 0;

基本符号差步骤 4



W= 0
X= W- 0= 0;
W= 2
X= W- 0= 2;

步骤(3)(略).

最终结果:$x_{14}=x_{21}=x_{25}=x_{26}=x_{32}=x_{33}=1$,其余 $x_{ij}=0, 1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 6$.(图中带"0"结点为源结点(含初始源及中间源),带"△"的结点为"目标"结点).

显然分组问题当 $a_i=1$ 时($1\leqslant i\leqslant m$)即为分派问题.

参考文献

1 堵丁柱.计算复杂性对运筹学发展的影响.运筹学杂志,1989,8(1):7~11.

2 许万蓉.线性规划.北京:北京理工大学出版社,1988.219~224.

3 Peter Kleinschmidt, Card W. Lee Heine Schannath. Transportation problems which can be solved by the use of Hirsch-Paths for the dual problems. Mathematical Programming, 1987, 37: 153~168.

4 何登旭.运输问题有最优符号差的一个充分条件.广西科学院学报,1998,14(2):30~34.

(责任编辑:黎贞崇)