DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.03.006
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (3): 177~ 180

一类投资模型的能控性
Controllability of A Class of Investment Model

谭光兴　　　潘　健
Tan Guangxing　　Pan Jian

(广西工学院管理工程系　柳州市东环路　545005)
(Dept. of Management, Guangxi Institute of Tech., Donghuanlu, Liuzhou, Guangxi, 545005, China)

摘要　讨论一类固定资产投资模型, 证明了系统的解的存在唯一性. 给出系统能控的充分必要条件.
关键词　分布参数系统　投资模型　半线性抽象方程　能控性
中图法分类号　O 231
Abstract　We deal with controllability properties of a class of investment model, and prove the existence and uniqueness of the solution. On the basis of the solution, the sufficient and necessary condition about controllability are given.
Key words　distributed parameter system, investment model, semi-linear abstract equation, controllability

国内生产总值 (GDP) 的增长是投资积累、劳动力和科技进步等因素作用的结果. 固定资产积累增长在经济运行中占有举足轻重的地位, 因此研究固定资产投资问题的能控性具有重大的现实意义[1]. 针对复杂的经济系统中的投资问题, 文献 [2] 建立了如下的投资模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k(a,t)}{\partial a} + \dfrac{\partial k(a,t)}{\partial t} = -\_(a)k(a,t) + g(a,t) \\ \quad t \in (0,T), \\ k(a,0) = k_0(a) \qquad a \in (0,a_m), \\ k(0,t) = r(t)A(t)L^{U}(t)\left(\int_0^{a_m} k(a,t)\,da\right)^{a} \\ \quad t \in (0,T). \end{cases} \tag{1}$$

其中 a 表示最大役龄, $k(a,t)$ 表示固定资产按役龄的分布密度函数, $\_(a)$ 为固定资产按役龄的相对折旧率, $r(t)$ 表示固定资产积累率, $k(0,t)$ 表示初始值, $h(t)$ 表示时刻 t 新增的固定资产, $A(t)$ 表示科技进步率, $L(t)$ 表示劳动力函数, T和U分别表示劳动力和资产产出的弹性系数, 且 $T+U=1$, $T,U>0$, $g(a,t)$ 是由进出口差额形成的固定资产分布密度函数. 不失一般性设 $g(a,t)=0$. 本文将应用现代控制论的观点和方法, 讨论分布参数控制系统 (1) 的能控性. 研究这类模型的现实意义在于考察投资系统在给定的时期内, 能否在投资政策 (积累率等) 的作用下, 从初始目标出发, 沿预定的投资目标轨线运行达到最终目标. 研究的结果对固定资产投资及产业结构调整等政策的制定有一定的参考价值.

1　系统的算子形式解

引理 1　设 $k'_0(a) + \_(a)k_0(a) \in L^2(0,a_m)$, $r(t) \in L^2(0,T)$, 且 $r(t)$ 连续可微, $\int_0^{a_m} \_(a)\,dd < \infty$ $(a < a_m)$, $\int_0^{a_m} \_(a)\,da \to \infty$ $(a \to a_m - 0)$. $A(t)$ 关于 t 单增, $t \to \infty$, $A(t) \to \infty$. 且在任意有限区间 $[0,T]$ 上有界. 其中: $L(t)$, $A(t) \in L^2(0,T)$, $h(t) \in L^2(0,T)$, $k_0(a) \in L^2(0,a_m)$, 则 (1) 等价于

$$k(a,t) = \begin{cases} k_0(a-t)\,e^{\int_{a-t}^{a} (d)\,dd} & a \geq t, \\ h(t-a)\,e^{\int_{a-t}^{a} (d)\,dd} & a \leq t. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $h(t) = r(t)A(t)L^{U}(t)\left(\int_0^{a_m} k(a,t)\,da\right)^{T}$.

作变换

$$q(t) = k(a,t) - U(t)\left(\int_0^{a_m} k(a,t)\,da\right)^{T} e^{\int_0^{a} (f)\,df}, \tag{3}$$

则 (3) 式可表为: $q(t) = (I - B(t))k(t)$, $\qquad (3')$

其中 $q(t) = q(a,t)$, $k(t) = k(a,t)$. 算子 $B(t)$ 定义如下:

$$B(t)k(t) = U(t)\left(\int_0^{a_m} k(a,t)\,da\right)^{T} e^{\int_0^{a} (f)\,df} \quad k(t) \in C((0,T), L^2(0,a_m)).$$

下面我们将证明 (3) 所作的变换是确当的. 为此我们将引进一些定义和记号.

定义 1[3]　设 X 是 Banach 空间, 如果 P 是 X 中

1998-10-28收稿, 1999-01-19修回.

的某非空凸闭集,并且满足下面两个条件:(1)$x\in p$, $\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in p$.(2)$x\in p$, $-x\in p\Rightarrow x=0$.则称P是X中的一个锥,用P^0表示P的内点集.如果$P^0\neq\varnothing$,则称P是一个体锥.设P是实Banach空间X中的一个体锥,对$x,y\in P^0$(P的所有内点的集合),令

$$M(x/y)=\inf\{\lambda: x\leqslant\lambda y\},\ m(x/y)=\sup\{\_: x\geqslant \_ y\},$$

显然 $0<m(x/y)\leqslant M(x/y)$,且 $m(x/y)y\leqslant x\leqslant M(x/y)y$.

定义 Hilbert投影距离为 $d(x,y)=\ln\{M(x/y)/(m(x/y))\}$.易知$d(x,y)$是$P^0$的一个拟距离.

定义2[3] 若$\forall x,y\in P$, $0\leqslant x\leqslant y$,有$\|x\|\leqslant\|y\|$,则称范数关于P是单调的.

定理1 $\forall t\in(0,T)$, $\int_0^{a_m}k(a,t)da\neq U^{\frac{1+U}{U}}(t)\left(\int_0^{a_m}e^{-\int_0^a (f)df}da\right)^{\frac{1}{U}}$, $k(a,t)$关于(a,t)连续,且范数关于P是单调的.则对任意$q(t)\in C((0,T),L^2(0,a_m))$,方程(3')有唯一解:

$$k(t)=(I-B(t))^{-1}q(t),$$

其中$(I-B(t))^{-1}$是算子$(I-B(t))$的逆.

证明 设S是$C((0,T),L^2(0,a_m))$中的有界集,对$\forall k(t)\in S$,因而$B(t)(S)$中诸函数等度连续.由此知$B(t)$是紧算子.

下面只需证明在定理的条件下,齐次方程

$$k(t)-B(t)k(t)=0,$$

即 $k(a,t)=U(t)\left(\int_0^{a_m}K(a,t)da\right)^T e^{-\int_0^a (f)df}$

只有零解.

令$E=C((0,T),L^2=(0,a_m))$, $P=\{k(t)\mid k(t)\in E, k(t)\geqslant 0\}$,考察算子

$$B(t)k(t)=U(t)\left(\int_0^{a_m}k(a,t)da\right)^T e^{-\int_0^a (f)df}.$$

若 $k(t)\in P^0$,即 $m=\min(k(t))(a)>0$,而 $B(t)k(t)=U(t)\left(\int_0^{a_m}k(a,t)da\right)^T e^{-\int_0^a(f)df}\geqslant m^T a_m^T U(t)>0$ $(0<T<1)$ $B(t): P^0\to P^0$,显然 $B(t)(\lambda k(t))=\lambda^T B(t)k(t)$.即$B(t)$是正T齐次的,并且当$0<T<1$时,有:如果$B(t)k_1(t)\leqslant B(t)k_2(t)$.从而知$B(t)$是增子.依上所述,有

$$m\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)k_2(t)\leqslant k_1(t)\leqslant M\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)k_2(t)\Rightarrow$$

$$\left[m\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]^T B(t)k_2(t)\leqslant B(t)k_1(t)\leqslant$$

$$\left[M\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]^T B(t)k_2(t),$$

故 $M\left(\frac{B(t)k_1(t)}{B(t)k_2(t)}\right)\leqslant \left[M\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]^T$, $m\left(\frac{B(t)k_1(t)}{B(t)k_2(t)}\right)\geqslant \left[m\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]^T$,

从而 $d(B(t)k_1(t),B(t)k_2(t))=$

$$\ln\left[M\left(\frac{B(t)k_1(t)}{B(t)k_2(t)}\right)/m\left(\frac{B(t)k_1(t)}{B(t)k_2(t)}\right)\right]\leqslant$$

$$T\ln\left(M\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)/m\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right)=Td(k_1(t),k_2(t)),$$

令 $B_1(t)k_1(t)=B(t)k(t)/\|B(t)k_1(t)\|$.则$B_2(t): P_1\to P_1$. ($P_1=P^0\cap S_1$, $s_1=\{x\mid x\in E,\|x\|=1\}$),并且 $k_1(t),k(t)\in P_1$时,有

$$d(B_1(t)k_1(t),B_1(t)k_2(t))=$$

$$d(B(t)k_1(t)/\|B(t)k_1(t)\|,$$

$$B(t)k_2(t)/\|B(t)k_2(t)\|)=d(B(t)k_1(t),$$

$$B(t)k_2(t))\leqslant Td(k_1(t),k_2(t)). \quad (4)$$

于是$B_1(t)$映P_1入P_1的压缩映象存在.而(P_1,d)是完备的,因此,$B_1(t)$在P_1中有唯一的不动点$k^0(t)$.

令 $k^*(t)=\|B(t)k^0(t)\|^{\frac{1}{1-T}}k^0(t)$.

下证$k^*(t)$是$B(t)$在P^0中的不动点.事实上,$k^*(t)\in P^0$,并且

$$B(t)k^*(t)=\|B(t)k^0(t)\|^{\frac{T}{1-T}}B(t)k^0(t)=$$

$$\|B(t)k^0(t)\|^{\frac{T}{1-T}+1}B_1(t)k^0(t)=k^*(t).$$

另外,若$k^{**}(t)\in P^0$.使$B(t)k^{**}(t)=k^{**}(t)$.由(4)式知

$$d(k^*(t),k^{**}(t))=d(B(t)k^*(t),B(t)k^{**}(t))$$

$$\leqslant Td(k^*(t),k^{**}(t)).$$

从而 $d(k^*(t),k^{**}(t))=0\Rightarrow k^*(t)=\lambda k^{**}(t)$, $\lambda>0$.于是

$$k^*(t)=B(t)k^*(t)=B(t)(\lambda k^{**}(t))=$$

$$\lambda^T B(t)k^{**}(t)=\lambda^T k^{**}(t).$$

由此得 $\lambda=1\Rightarrow k^*(t)=k^{**}(t)$.

最后证$k^*(t)$是$B(t)$在E中的唯一的下不动点.为此,只须证明

若 $R(t)\in E$, $R(t)\geqslant 0$不恒为0,且$B(t)R(t)=R(t)$,则必有:$R(t)\in P$.这是显然的.由齐次方程

$$(I-B(t))k(t)=0, \quad (5)$$

或 $k(a,t)-U\left(\int_0^{a_m}k(a,t)da\right)^T e^{-\int_0^a(f)df}=0$, (6)

得 $k(a,t)=h(t)e^{-\int_0^a(f)df}=0$, (7)

将(7)式代入(6)式得

$$[1-h^U(t)]\left(\int_0^{a_m}e^{-\int_0^a(f)df}\right)^T h(t)e^{-\int_0^a(f)df}=0, \quad (8)$$

若 $h(t)\neq 0$,则(8)有唯一的正不动点满足

$$h^U(t)=U(t)\left(\int_0^{a_m}e^{-\int_0^a(f)df}da\right)^T\Rightarrow\int_0^{a_m}k(a,t)da=$$

$$U^{\frac{1+U}{U}}(t)\left(\int_0^{a_m}e^{-\int_0^a(f)df}da\right)^{-\frac{1}{U}},$$

依定理的假设,方程只有零解,由此得出$(I-B(t))$

可逆.定理得证.

施行变换(3)后,方程(1)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial a}+\dfrac{\partial q}{\partial t}=-\_(a)q-\dfrac{\partial}{\partial t}\{\mathrm{U}(t)\\ \int_0^{a_m}((I-B(t))^{-1}q(t))(a)\mathrm{d}a]^{\mathrm{T}}\}\mathrm{e}^{-\int_0^a\_(p)\mathrm{d}p},\\ q(a,0)=k_0(a)-\mathrm{U}(t)\int_0^{a_m}k(a,t)\mathrm{d}a)^{\mathrm{T}}\\ \quad \mathrm{e}^{-\int_0^{a_m}\_(p)\mathrm{d}p},\\ q(0,t)=0.\end{cases}\tag{9}$$

定义 $L^2(0,a_m)$ 中的算子 A;

$$Aq=-\_(a)q-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a},$$

$$D(A)=\{q(a),Aq(a)\in L^2(0,a_m),q(a)=0\},$$

于是方程(9)可以改写成自反的 Banach 空间 $L^2(0,a_m)$ 中的发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Aq+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[G(t)q(t)],\\ q(0)=q_0.\end{cases}\tag{10}$$

其中 $G(t)q(t)=-\mathrm{U}(t)\int_0^{a_m}[I-B(t)^{-1}q(t)](a)\mathrm{d}a)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\int_0^a\_(p)\mathrm{d}p}$.

引理 2[4] 对 $\forall\lambda\in C$(复数集)$\lambda\in \mathrm{d}(A)$,且有

$$R(\lambda;A)p=\int_0^a p(s)\mathrm{e}^{-\lambda(a-s)-\int_s^a\_(\mathrm{f})\mathrm{d}\mathrm{f}}\mathrm{d}s.$$

证明 对方程(10)作 Laplace 变换,我们有

$$\begin{cases}q(a,\lambda)=\int_0^\infty q(a,t)\mathrm{e}^{-}\mathrm{d}t,\\ \lambda q(a,\lambda)-q(a,0)=\int_0^\infty\dfrac{\partial q(a,t)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t,\\ \lambda[G(\lambda)q(\lambda)]-G(0)q(0)=\\ \quad\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{d}[G(t)q(t)]}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t,\\ \dfrac{\mathrm{d}q(a,\lambda)}{\mathrm{d}a}=\int_0^\infty\dfrac{\partial q(a,t)}{\partial a}]\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{11}$$

将(11)代入(10)得到如下的常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a}+[\lambda-\_(a)]q=q(a,0)-\lambda G(\lambda)q(\lambda)\\ \quad +G(0)q(0),\\ q(0,\lambda)=0.\end{cases}\tag{12}$$

常微分方程式(12)的解为

$$q(a,\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda a-\int_0^{a_m}\_(p)\mathrm{d}p}\int_0^a p(s)\mathrm{e}^{\lambda s+\int_0^s\_(p)\mathrm{d}p}\mathrm{d}s,$$

其中 $p(s)=q_0(s)-\lambda(G(\lambda)q(\lambda))(s)+(G(0)q(0))(s)$.并且

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a}+[\lambda+\_(a)]q=(\lambda I-A)q,$$

故 $(\lambda I-A)=p$.

$$(\lambda I-A)^{-1}p=\int_0^a p(S)\mathrm{e}^{-\lambda(a-s)-\int_s^a\_(p)\mathrm{d}p}\mathrm{d}s.$$

定理 2 在 $L^2(0,a_m)$ 中 $\forall t>0$,A 所生成的 C_0 类半群可表示为

$$(T(t)q)(a)=\begin{cases}q(a-t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\_(\mathrm{f}-t-a)\mathrm{d}t} & a\geqslant t,\\ 0 & a<t.\end{cases}$$

从而方程(1)在 $L^2(0,a_m)$ 有唯一的解

$$k(t)=(I-B(t))^{-1}(T(t)q_0+\int_0^t T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)q(s)]\mathrm{d}s),\tag{13}$$

并且方程(10)等价于

$$q(t)=T(t)q_0+\int_0^t T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)q(s)]\mathrm{d}s.\tag{14}$$

2 系统的能控性

定义 3 对于指定 t_0 和状态 x_0.当且仅当存在时间 f_2 和容许控制 $u\in U$.(f_2 和 u 都可能与 (t_0,x_0) 有关),使得 $x_0=\mathrm{h}(t_0,\mathrm{f}_2;0,u)$ 就说系统在 t_0 处的状态是可达的;其中 $\mathrm{h}(t_0,\mathrm{f}_2;x,u)$ 为状态转移映射.文中,$r(t)$ 是控制量.

定义 4 如果所有的 (t_0,x_0) 都可达,则称系统是状态可达的.

定义 5 系统(14)在区间 $[0,T]$ 称为关于 (k_0,k_1) 能控是指存在控制 $r(t)U$,使得 $k(T,k_0,r)=k$.

定理 3 若系统(14)在区间 $[0,T]$ 关于 (k_0,k_1) 能控,则(1)亦在区间 $[0,T]$ 称为关于 (k_0,k_1) 能控,反之亦然.

令 $N(q(t),r(t))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G(t)q(t))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{-r(t)A(t)\cdot L^{\mathrm{U}}(t)\int_0^{a_m}[I-B(t)^{-1}q(t)](a)\mathrm{d}a)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\int_0^a\_(p)\mathrm{d}p}\}$,

则系统(10)可以写成如下抽象半线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Aq+N(q,r),\\ q(0)=q_0.\end{cases}\tag{15}$$

这里,$N(\cdot,\cdot)$ 是 $X\times U$ 到 X 上的单值非线性向量值函数,且满足:

(1) 对任何 $q(\cdot)\in C(0,T;X)$,$u\in U$.都有 $N(\cdot,\cdot)\in L^2(0,T;X)$.

(2) 对任何 $r(\cdot)\in L^2(0,T;U)$,(15)有唯一的 mild 解:

$$q(t;q_0,r)=T(t)+\int_0^t T(t-s)N(q(s;q_0,r),r(s))\mathrm{d}s.\tag{15'}$$

引入(15′)相应的线性系统

$$\begin{cases}y'=Aq+u,\\ y(0)=q_0.\end{cases}\tag{16}$$

则当 $u(\cdot)\in L^2(0,T;X)$ 时,(16)有唯一的 mild

解

$$y(t;q_0,u) = T(t)q_0 + \int_0^t T(t-s)u(s)\,ds. \quad (17)$$

设 $P_N(q_0) = \{q \in X: q = q(T;q_0,r), r \in L^2(0,T;U)\}$,

$P(q_0) = \{q \in X: q = y(T;q_0,u), u \in L^2(0,T;X)\}$,

$P_N(q_0)$, $P(q_0)$ 分别称为系统(15),(16)在 T 时刻的能达集.

定义映照: $F: L^2(0,T;U) \to C(0,T;X)$, $Fr = q(\cdot,q;r)$,

$\bar{N}: C(0,T;X) \times L^2(0,T;U) \to L^2(0,T;X)$, $\bar{N}(q,r)(\cdot) = N(q(\cdot),r(\cdot))$.

$$G: L^2(0,T;X) \to X,\ Gq = \int_0^T T(T-s)q(s)\,ds.$$

由 G 的定义知 G 是一个多值映照,它的逆算子 G^{-1} 总是存在的,并且 G^{-1} 也是一个多值映照. 令: $V_T(q_0,q) = G^{-1}(q - T(T)q_0)$.则[5]

$$V_T(q_0,q) = \{v(\cdot) \in L^2(0,T;X): q = y(T;q_0,v)\}. \quad (18)$$

这里,当 $q \in R(G)$ (G 的值域)时, $G^{-1}q$ 是 $L^2(0,T;X)$ 的子集,当 $q \notin R(G)$ 时, $G^{-1}q = \varnothing$.对 $v(\cdot) \in V_T(q_0,q)$,有 $Gv = q - T(T)q_0$ 及[6]

$$q(t;q_0,u) = T(t)q_0 + \int_0^t T(T-s)v(s)\,ds.$$

所以 v 使得系统(15)从 q_0 出发在 T 时刻到达 q_1,因此,(18)式完全刻划了系统(17)的能控性.

定理 4 系统(17)在区间 $[0,T]$ 关于 (y_0,y_1) 能控的充分必要条件是 $V_T(q_0,q) \neq \varnothing$.

对系统(15′)的任一条轨道 $q(t;q_0,r)$,取 $u(t) = N(q(t;q_0,r),r(t))$, $t \in [0,T]$,则 $q(\cdot;q_0,r) = y(\cdot;q_0,u)$.因此,(15′)的任一条轨道均是(17)的轨道,故有 $P_N(q_0) \subset P(q_0)$,下面定理说明在一定的条件下,相反的包含关系也成立.

定理 5[7] 系统(15′)区间 $[0,T]$ 关于 (q_0,q_1) 能控的充分必要条件是: 系统(15)在区间 $[0,T]$ 关于 (q_0,q_1) 能控,及存在 $v(\cdot) \in V_T(q_0,q)$, $r(t) \in U$,使得 $\bar{N}(Fr,r) = v$.

引理 3 A 的共轭算子的预解式有如下的表达式

$$R(\lambda;A^*) = R^*(\bar{\lambda};A)p = \int_f^{a_m} e^{\lambda(f-a)+\int_0^f \mu(s)ds} p(a)\,da.$$

引理 4 A^* 有如下表达式

$A^* p = \dfrac{dp}{da} - \mu(a)p$, $D(A^*) = \{p \mid p \in L^2(0,a_m), A^* p \in L^2(0,a_m), p(a_m) = 0\}$,

它生成的 C_0 类半群可表为

$$(T^*(t)p)(a) = \begin{cases} p(a+t)e^{-\int_a^{t+a}\mu(f)df} & a \leqslant a_m - t, \\ 0 & a > a_m - t. \end{cases}$$

定理 6 线性系统(17)在区间 $[0,T]$ 关于 (q_0,q_1) 能控的充分必要条件是存在正数 M 使得

$$\| T^*(T-s)q \|_{L^2(0,a_m)} \geqslant M \| q \|_{L^2(0,a_m)}.$$

$\forall q \in X^* = X = L^2(0,a_m)$.

即 $\int_0^{a_m} [q(a+T-s)e^{-\int_0^{T-s+a}\mu(f)df}]^2 da \geqslant M\int_0^{a_m} q^2(a)\,da$.

$(a \leqslant a_m - t)$.

证明 不失一般性,我们设 $q_0 = 0$,令 $Qu = \int_0^T T(T-s)u(s)\,ds$,那么, $Q \in L(L(0,T;X),X)$. $Q^* \in L(X,X^*)$.对任意 $q \in X^*$, $u \in L^2(0,T;X)$,有

$$\langle Qu,q \rangle = \int_0^T \langle u(s), T^*(T-s)q \rangle\, ds = \langle u, Q^* q \rangle.$$

因此, $Q^* q = T^*(T-s)q$.控制系统(16)在区间 $[0,T]$ 关于 (q_0,q_1) 能控等价于算子的值域 $R(Q) = X$,而 $R(Q) = X$ 必须且只须 Q^* 有有界逆,也就是

$\| T^*(T-s)q \|_{L^2(0,a_m)} \geqslant M \| q \|_{L^2(0,a_m)}$. $\forall q \in X^* = X = L^2(0,a_m)$.

定理 4与定理 6结合,我们给出了系统 (1) 能控的充分必要条件.

参考文献

1 Neck R. Controllability and Observability of Dynamic Economic Systems. Proc 9th IFIP Conf. On Optimis, Techn Warsaw. 1979, 462~472.

2 于景元,赵 军,朱广田.经济增长中的投资模型.系统工程理论与实践, 1996, 16(4): 13~20.

3 郭大钧.非线性泛函分析.济南: 山东科技出版社, 1985.

4 潘 健.连续人口发展方程的解.系统科学与数学, 1989, 9(1): 77~82.

5 Hong Xingzhou. Controllability properties of linear and semi-linear abstract control system. SIAM J Control and Optimization, 1984, 22(3): 405~420.

6 Kobayashi T. Some remarks on controllability for distributed parameter system. SIAM J Control and Optimization, 1978, (16): 733~742.

7 赵 怡,黄 煜.非线性分布参数控制系统理论.广州: 广东科技出版社, 1991.

(责任编辑: 黎贞崇)