

超混沌系统的混沌同步

Synchronization in the Nonlinear Hyperchaotic Systems

王金兰

陈光旨

Wang Jinlan

Chen Guangzhi

(广西大学物理系 南宁市西乡塘路10号 530004)

(Dept. of Phy., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 利用主动-被动分拆同步方法 (APD) 通过一个一维驱动信号实现了超混沌 LC 振荡电路系统混沌同步, 从理论上给予了论证, 并在数值实验上探讨了其在通讯中的应用. 另外, 联合 APD 方法和自适应控制混沌的方法实现了超混沌 Rössler 系统的精确同步. 该方法对参数不匹配具有鲁棒性.

关键词 超混沌 混沌同步 保密通讯

中图法分类号 O 414

Abstract The hyperchaotic synchronization was achieved in the LC oscillator with only a one-dimensional drive signal via the active-passive decomposition method (APD) and demonstrated in theory. The potential applications in communications was further discussed in numerical experiments. The method provides the high encrypting efficiency and the signal can be recovered exactly. Moreover, The complete synchronization was realized in the hyperchaotic system combining the APD method and the adaptive method. This method robusts to the mismatched parameters.

Key words hyperchaos, synchronization, secure communications

自 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1] 开创性地提出驱动-响应同步方案 (简称 PC), 并首先在电子线路中得到实现^[2]以来, 混沌同步及其应用成为近年来人们追踪的热点之一, 无论是理论和实验上都已做了大量的工作. 利用混沌同步进行保密通讯要求过三关: 同步关、破译关和干扰关. 随着应用研究的深入, 人们发现^[3,4], 在某些情况下, 利用弱混沌系统 (只有一个正的 Lyapunov 指数) 进行保密通讯, 其抗破译能力还不够理想. 因此, 超混沌系统的混沌同步可望在混沌保密通讯中大显身手.

鉴于主动-被动分拆同步法 (APD) 具有许多其它混沌同步方法所没有的优点, 本文以 APD 方法来实现非线性超混沌系统中的混沌同步, 并对其在保密通讯中的潜在应用给予数值模拟上的讨论.

1 APD 方法的基本原理

鉴于 PC 方法受特定分解的限制, Kocarev 及 Parlitz^[5-7] 提出了推广的 PC 方法——APD 方法. 该方法的主要思想是这样:

对一个自治的动力学系统

$$\dot{z} = f(z), \quad (1)$$

总可以将其改写为非自治系统形式

$$\dot{x} = f(x, s(t)), \quad (2)$$

其中 $s(t)$ 为所选的驱动变量,

$$s = h(x) \text{ 或 } s = h(s, x). \quad (3)$$

复制一个与 (2) 完全相同且受共同的驱动信号作用的系统

$$\dot{y} = f(y, s(t)), \quad (4)$$

由 (2) 和 (4) 可导出两系统变量差 $e = x - y$ 的微分方程

$$\dot{e} = f(x, s(t)) - f(y, s(t)). \quad (5)$$

显然, 若 (5) 在 $e = 0$ 处有一个稳定的不动点, 则 (2) 与 (4) 存在一个稳定的同步态 $x = y$, 这意味着可以达到精确同步.

2 超混沌 LC 振子系统的混沌同步

简单的超混沌 LC 振子模型是由 A. Tamasevicius 等^[8] 提出的, 包括一个串联的 LC 振荡回路, 负阻, 充当非线性元件的二极管和一个运算放大器. 动力学系统可描述如下

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = az_1 - z_2 - z_3, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_1 - bz_2, \\ -\frac{dz_3}{dt} = z_1 - cz_3 - z_4, \\ X \frac{dz_4}{dt} = z_3 - d(z_4 - 1)H(z_4 - 1). \end{cases} \quad (6)$$

其中 a, b, c, d, X 为系统参数, $H(u)$ 为阶跃函数

$$H(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 & u \geq 0 \end{cases}$$
 当系统参数取为: $a = 0.6, b = 0.05, c = 0.015, d = 10, X = 0.33, _ = 0.3$ 时, 系统 (6) 有两个正的 Lyapunov 指数: $\lambda_1 = 0.11, \lambda_2 = 0.06$

由前面的讨论可知主动-被动分拆同步法可以较自由地选择驱动变量. 下面我们就用两种不同方法来构造不同的超混沌同步系统.

方法 1 选择驱动变量 $G = 1.6x_1 - x_2 - x_3$, (6) 式可改写为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + G, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - bx_2, \\ -\frac{dx_3}{dt} = x_1 - cx_3 - x_4, \\ X\frac{dx_4}{dt} = x_3 - d(x_4 - 1)(Hx_4 - 1). \end{cases} \quad (7)$$

产生 (7) 式的一个完全复制品, 用变量 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示, 系统 (7) 和它的复制系统受相同的信号 G 驱动, 则两系统对应变量的差 $e = x - y$ 的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = -e_1, \\ \frac{de_2}{dt} = e_1 - be_2, \\ -\frac{de_3}{dt} = e_1 - ce_3 - e_4, \\ X\frac{de_4}{dt} = e_3 - de_4. \end{cases} \quad (8)$$

显然, 由 (8) 中的第一个方程有 $e_1 \propto e^{-t}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_1 \rightarrow 0$, (8) 可简化成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{X} & -\frac{1}{X} \\ 0 & \frac{1}{X} & -\frac{d}{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

假设 (9) 式的本征值为 λ , 它满足

$$\begin{vmatrix} -b - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{X} - \lambda & -\frac{1}{X} \\ 0 & \frac{1}{X} & -\frac{d}{X} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + b) \left[\left(\frac{c}{X} - \lambda \right) \left(\frac{d}{X} + \lambda \right) + \frac{1}{X} \right] = 0, \quad (10)$$

$$\lambda_1 = -b, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{X} + \frac{d}{X} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{X} - \frac{d}{X} \right)^2 - \frac{4}{X}} \right], \quad (11)$$

$$\text{或 } \lambda_1 = -0.05, \lambda_2 = -0.38, \lambda_3 = -29.96.$$

而 $e_i \propto e^{-\lambda_i t} (i = 1, 2, 3, 4)$, 所以, 两系统对应变量的差随时间以指数速率衰减为零, 系统 (8) 具有整体稳定性. 因此, 系统 (7) 和它的复制系统最终可达到精确同步 (图 1, 图中为所有对应变量的差的平方和随时间的变化情况).

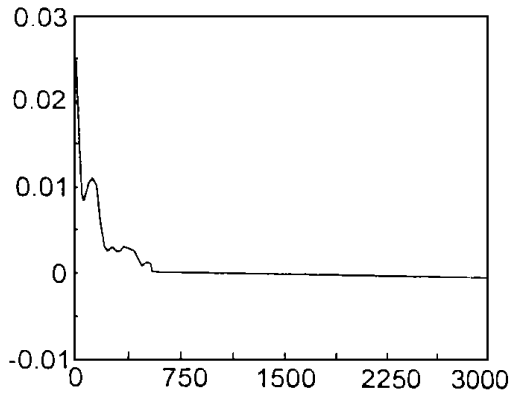


图 1 超混沌 LC 振荡子系统的同步过程

Fig. 1 Synchronization in LC oscillator
 驱动变量 $G = 1.6x_1 - x_2 - x_3$ 时, 对应变量的差的均方和随时间的变化图. Relation of $\Delta (\Delta = \frac{1}{4}e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ versus time with the drive signal $G = 1.6x_1 - x_2 - x_3$.

方法 2 选择驱动变量 $G = 1.6x_1$, 则系统 (6) 改为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + G, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - bx_2, \\ -\frac{dx_3}{dt} = x_1 - cx_3 - x_4, \\ X\frac{dx_4}{dt} = x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1). \end{cases} \quad (12)$$

相似的, (12) 与其复制品在共同混沌信号的作用下, 差 $e = x - y$ 的演化方程为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = -e_1 - e_2 - e_3, \\ \frac{de_2}{dt} = e_1 - be_2, \\ -\frac{de_3}{dt} = e_1 - ce_3 - e_4, \\ X\frac{de_4}{dt} = e_3 - de_4, \end{cases} \quad (13)$$

即

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ \frac{1}{X} & 0 & -\frac{c}{X} & -\frac{1}{X} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d}{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

设方程 (14) 的本特征值为 λ , 它满足

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -b-\lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{X} & 0 & -\frac{1}{X}-\lambda & -\frac{1}{X} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d}{X}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

即

$$(\lambda + 1)(\lambda + \frac{d}{X})(\lambda + b + 1)(\lambda + \frac{c+1}{d} + \frac{X}{b+1}) = 0 \quad (16)$$

或

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -(\frac{c+1}{d} + \frac{X}{b+1}) \\ \lambda_3 = -3.17 \\ \lambda_4 = -\frac{d}{X} = -33.3 \end{cases} \quad (17)$$

因此, 系统 (13) 是渐近稳定的, 系统 (12) 与其复制系统可达到精确同步。

事实上, 我们还可以选择其它形式的驱动变量来构造其它不同的超混沌系统, 这种选择的灵活性使得人们可以根据自己的需要来构造不同的混沌同步系统, 这极大的拓宽了其在实际中的应用潜力。

将上述同步方案用于混沌通讯中, 把上面的超混沌同步系统作为发射-接收系统. 选择参数使系统 (6) 处于混沌态, 则驱动变量是混沌的. 有用的信号加载在混沌信号上构成驱动信号, 作为发射机发射和接收机接收的共同信号,

$$G = G + S = 1.6x_1 + S_i$$

设接收端重构的信号为 R , 则它可有下式求得

$$R_i = G - 1.6y_1$$

当发射机与接收机达到完全同步时,

$$y_1 \rightarrow x_1,$$

因此, 在接收端重构的信号 R_i 为

$$R_i = G - 1.6y_1 = G - 1.6x_1 = S_i$$

信号可无误差的准确恢复! 图 2 给出了加载正弦信号 $S_i = 0.2 \sin(0.1\pi t)$ 时的数值模拟实验结果. 其中 (a) 和 (b) 分别为发射机发射的信号 G 和重构的信号同有用信号的差值信号随时间的变化图. 显然, 被调制后的信号是混沌的, 即使被第三者截取, 也很难被破译. 差值信号为零说明信号可准确恢复.

我们进一步讨论发射机和接收机的系统参数不完全匹配的情形. 数值实验表明, 即使是很小的参数不匹配, 也会导致同步失去, 信号无法重构出来. 图 2 (c) 对应 $\mu = 0.3, \mu' = 0.303$ 条件下, 重构的信号

与原有有用信号的差值信号随时间的变化情况, 由图 2 可清楚看出, 重构的误差较大. 这表明该同步方案对系统参数具有敏感性.

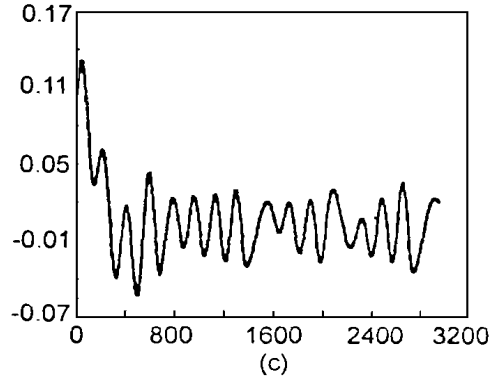
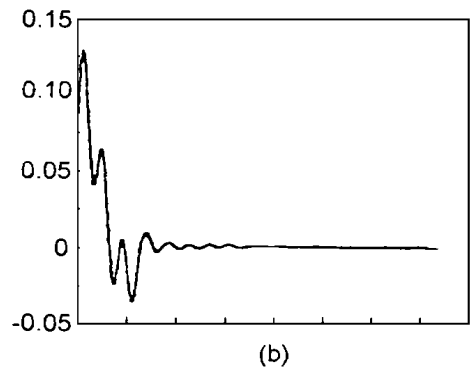
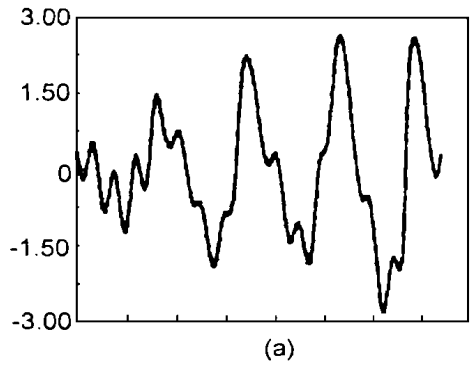


图 2 APD 方法在通讯中的应用 ($S_i = 0.2 \sin(0.1\pi t)$)
 Fig. 2 The application of APD method in communications ($S_i = 0.2 \sin(0.1\pi t)$)
 (a) 发射机发射的信号: $G = 1.6x_1 + S_i$. The transmitted drive signal $G = 1.6x_1 + S_i$; (b) 系统参数完全匹配时, 差值信号 ($R_i - S_i$). The difference signal ($R_i - S_i$) versus time for identical parameters of the transmitter and receiver; (c) 参数不完全匹配 $\mu = 0.3, \mu' = 0.303$ 时信号的恢复情况, 其中横坐标均为迭代次数. Nonsynchronization for the mismatched parameters $\mu = 0.3, \mu' = 0.303$.

3 超混沌 Rossler 系统的混沌同步

类似前面的讨论, 下面我们将 APD 方法用于实现超混沌 Rossler 系统中的混沌同步. 广为研究的超混沌 Rossler 系统^[9]的动力学方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + ay + w, \\ \frac{dz}{dt} = 3 + xz, \\ \frac{dw}{dt} = bw - cz. \end{cases} \quad (18)$$

在 $a = 0.25, b = -0.5, c = 0.05$ 时, 系统 (18) 有两个正的 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.109, \lambda_2 = 0.024$, 系统出现超混沌. 选择驱动变量 $G = x + y + z$, 则 (18) 式可写成下列形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -0.75y + G, \\ \frac{dz}{dt} = 3 + xz, \\ \frac{dw}{dt} = bw - cz. \end{cases} \quad (19)$$

通过数值模拟实验表明, 系统 (19) 与其复制系统在驱动变量 G 作用下, 只能达到部分同步. 图 3 (a) (b) (c) 和 (d) 绘出了各对应变量的差随时间的变化情况, 由图 3 可以看出, 变量分别达到了同步, 而变量 w 则始终无法实现同步.

为了实现 Rössler 超混沌系统的完全同步, 我们可以在此基础上引入自适应控制同步法或负反馈方法. 这里我们采用自适应控制同步法^[10]. 根据自适应控制同步法的基本原理, 在复制系统中, 保持 a, b 参数的值不变 (与 (19) 式中的一致), 对参数 c 进行自适应调节, 复制系统的具体动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = -y' - z', \\ \frac{dy'}{dt} = -0.75y' + G, \\ \frac{dz'}{dt} = 3 + x'z', \\ \frac{dw'}{dt} = b'w' - c'z', \\ \frac{dc'}{dt} = -\lambda(w' - w) \operatorname{sgn}\left(\frac{dw'}{dc'}\right) - W(c' - c). \end{cases} \quad (20)$$

其中 w, c 分别为目标轨道和目标系统的参数, 即 (19) 式中的变量与参数, λ, W 分别表示刚性常数与衰减系数, $\operatorname{sgn}\left(\frac{dw'}{dc'}\right)$ 为符号函数. 数值实验表明, 当 (20) 式中的参数 c' 随时间的演变到与目标系统 (19) 中的参数 c 完全一致时, (19) 与 (20) 达到完全同步. 图 4 (a) 给出了两系统对应差值变量的均方差的时间序列, 显然 (19) 和 (20) 最终达到了精确同步.

采用自适应控制同步法的一个最大的好处是可

以不必知道系统的具体动力学方程, 在此也可略见一斑; 而且自适应控制使系统具有“自我调控”的功能, 可使系统由于参数的不匹配导致的失同步又重新同步, 为同步提供了较强的抗干扰能力. 图 4 (b) 给

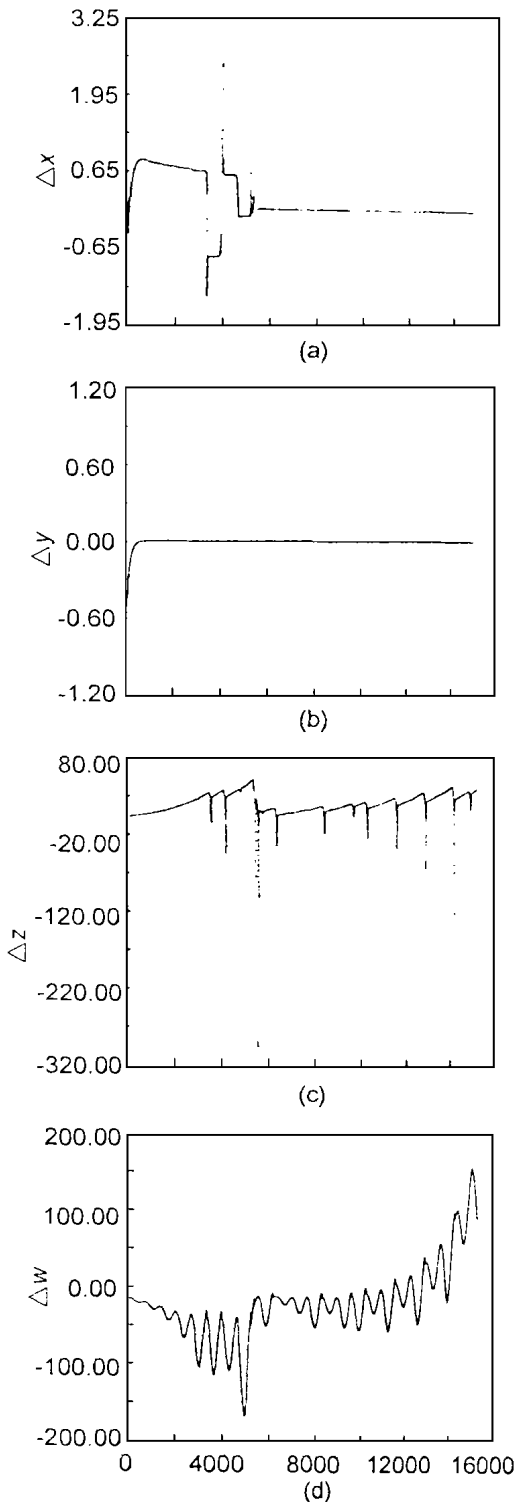


图 3 超混沌 Rössler 系统中的部分同步 ($G = x + y + z$)
Fig. 3 Synchronization in Rössler system at $G = x + y + z$
(a) (b) (c) (d) 分别对应 x, y, z, w 变量差. (a) (b) (c) (d) are corresponding to the difference of the variables x, y, z, w respectively.

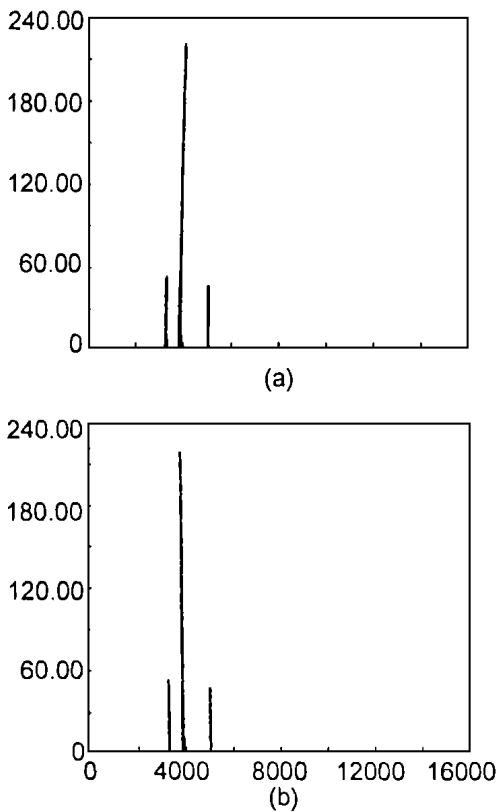


图4 在图3的基础上加自适应控制的同步情况

Fig. 4 Synchronization combined the adaptive control as in fig. 3

(a) 参数完全匹配 Identical parameters; (b) 参数不匹配: $b = -0.5$, $b' = -0.505$. Mismatched parameters with $b = -0.5$, $b' = -0.505$.

出了系统参数 $b = -0.5$, $b' = -0.505$ 条件下的系统的同步情况.

4 结语

我们利用 APD 方法实现了超混沌 LC 振荡电路系统以及超混沌 Rössler 系统中的超混沌同步. 本工作的最大特点是只用一维驱动信号就实现了超混沌系统的快速完全同步, 这对于保密通讯非常有用. 在传统的通讯中, 为了防止信号被破译, 一般要求接收系统与发射系统的同步时间不超过 3 ms, 而且驱动

信号越少, 越便于在硬件上实现, 因为驱动信号往往是从发射机中引出, 而后以脉冲的形式传送给接收机; 接收机在脉冲信号的作用下, 与发射机达到同步, 从而将有用的信息从混沌信号中取出. 而且, APD 方法可以根据不同的需要选择驱动信号来构造不同的混沌甚至超混沌系统, 这一特点使得它相对驱动-响应方法具有更多的灵活性, 因而在实际中将有更广阔的应用前景. 更为突出的是, 该方法对系统参数具有敏感性, 为混沌通讯提供了较高的抗破译能力. 还值得提出来的一点是, 超混沌系统具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数, 可望提供性能较好的伪随机码对信号进行调制, 从而获得更高的保密性. 综上所述的各种优点, 该工作非常可望在保密通讯中大显身手.

参考文献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 1990, 64 821.
- 2 Carroll T L, Pecora L M. A circuit for studying the synchronization of chaotic systems. *Int J Bif Chaos*, 1992, 2 659.
- 3 Grassberger P et al. *Chaos*, 1993, 3 127.
- 4 Perez G, Cerdeira H A. *Phys Rev Lett*, 1995, 74 1970.
- 5 Kocarev L, Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Phys Rev Lett*, 1995, 74 5028.
- 6 Kocarev L, Parlitz U, Stojanovski T. An application of synchronized chaotic dynamic arrays. *Phys Lett A*, 1996, 217 280.
- 7 Parlitz U, Kocarev L, Stojanovski T. Encoding message using chaotic synchronization. *Phys Rev E*, 1996, 51, 4351.
- 8 Tamasevicius A, Namajunas A, Genys A. *Electron Lett*, 1996, 32, 11, 957.
- 9 Rössler O E. *Phys Lett A* 71, 1979, 155.
- 10 John J K, Amitkar R E. Synchronizing chaos by the adaptive method. *Phys Rev E*, 1994, 49, 4843.

(责任编辑: 黎贞崇)