DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 241～242

G.M. (2n个顶点)的同胚类个数的一个计算公式

A Formula for Computing the Homeomorphism Class Number of G.M. (2n vertices)

袁夫永

Yuan Fuyong

(广西职业技术学院 南宁市明阳 530227)

(Guangxi Vocational Technique College, Mingyang, Nanning, Guangxi, 530227, China)

摘要 利用顶点扭转运算和组合理论推导出具有 $2n$ 个顶点的 G.M. 的同胚类个数的一个计算公式.

关键词 缩影 负边 辐射边 扭转运算 图式流形

中图法分类号 O 157.5; O 189

Abstract A formula for computing the homeomorphism class number of G.M. (2n vertices) is developed with the twist operation and the combinatorial theory.

Key words contraction, negative edge, radioedge, twist operation, graphlike manifold

“图式流形”是河南大学刘亚星教授开创的一个研究领域. 所谓“图式流形”，即将一个图的每个顶点都换为流形，把每个边都换为相应流形与单位闭区间的拓扑积. 本文所论“图式流形”，是将顶点都换为圆周，把每个边都换为管($S\times I$)，管与圆周“衔接”时，映射度为 $+1$ 或 -1. 我们把原来的图称为该图式流形的缩影. 把缩影为 f 的图式流形简记为 $G.M.f$. 对于本文所论及的这类图式流形，可规定每边的符号，正号或负号取决于其两端的映射度的相同或相异. 已经证明[1]，将某个顶点(圆)改变方向，是一个同胚变形，且相当于把该顶点(圆)相关联的所有边改变符号. 我们称此同胚变形为该顶点的扭转运算.

关于 G.M. ，G.M. ，G.M. 的拓扑分类问题，在文献[2,3]中已经解决. 一般的具有 $n+1$ 个顶点的 G.M. 的同胚类个数的计算公式，已用两种方法推出（一种方法在1997年国际组合数学学术会议上宣读；另一方法作为纪念国际数学大师 P. Erdos 教授的特约论文.）这类图式流形，其缩影是常见的棱锥体的一维骨架的平面图. 另一类常见的立体图形是棱台体或棱柱体的一维骨架，该骨架关于同胚就是 . 为了给出该类图式流形的同胚类个数的计算公式，先给出如下的定理.

定理 1 各边取正号或负号的正 n 边形，负边分布情形的个数为

$$\frac{1}{2n}\Big(\sum_{d\mid n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}+\beta\Big),$$

其中 $\Phi(d)$ 是欧拉函数，表示 $r<d$，且 $(r,d)=1$ 的自然数 r 的个数，

$$\beta=\begin{cases}3m\cdot 2^{m}, & n=2m,\\ (2m+1)\cdot 2^{m+1}, & n=2m+1.\end{cases}$$

证明 设 G 是自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的圆形排列的旋转群，集合 Ω 是所有可能的排列，G_Ω 是 G 对应于 Ω 上的置换群. 群 G 的顺时针旋转元素，个数为 $\sum_{d\mid n}\Phi(d)=n$，对应于 G_Ω 中某置换在 Ω 中稳定点个数为 $\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}$，总数为 $\sum_{d\mid n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}$；群 G 的反射旋转元素个数为 n，当 $n=2m$ 时，对应于 G_Ω 中某置换在 Ω 中稳定点个数为 2^m 或 2^{m+1}，总数为 $\beta=3m\cdot 2^m$；当 $n=2m+1$ 时，对应于 G_Ω 中某置换在 Ω 中稳定点个数为 2^{m+1}，总数为 $\beta=(2m+1)\cdot 2^{m+1}$. 根据 Burnside 引理，各边取负号或正号的正 n 边形，负边分布情形的个数为

$$\frac{1}{2n}\Big(\sum_{d\mid n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}+\beta\Big),$$

其中 $\Phi(d)$ 是欧拉函数，表示 $r<d$，且 $(r,d)=1$ 的自然数 r 的个数，

1999-08-04 收稿。

$$\beta = \begin{cases} 3m \cdot 2^m, & n = 2m, \\ (2m+1) \cdot 2^{m+1}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

证毕.

对于 $G.M.\bigcirc_{2n\text{个顶点}}$，我们将它所有的边分为 3 类：外边 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$；内边 $B_1B_2, B_2B_3, \cdots, B_{n-1}B_n, B_nB_1$；辐射边 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_nB_n$，如图 1.

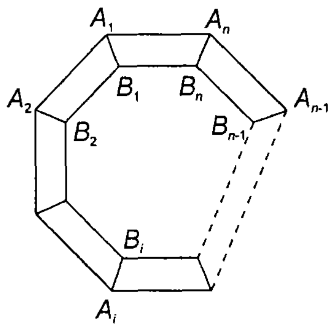

图 1　具有缩影为棱台或棱柱的一维骨架的图式流形

Fig. 1　Graphlike manifold of one-dimensional skeleton with contraction of pyramidal frustrum and prism

如果 A_1A_2 为负，扭转 A_1，使其变为正；如果这时 A_1B_1 为负，扭转 B_1，使其变为正；若 A_2B_2 为负，扭转 B_2，使其变为正；若 A_2A_3 为负，扭转 A_3，使其变为正；…；若 $A_{n-1}A_n$ 为负，扭转 A_n，使其变为正；若这时 A_nB_n 为负，扭转 B_n，使其变为正. 于是不妨设辐射边皆为正，外边中，除去 A_nA_1 可正可负外，其余皆正.

今对 A_nA_1 的符号分别讨论：

1. A_nA_1 为正时，内边的负边分布问题，已由定理 1 完满解决；

2. A_nA_1 为负：

1）当所有内边皆正时，与 A_nA_1 为正且 B_nB_1 为负时等同；

2）当内边中有偶数个负边时，经扭转运算，易将所有内边变为正，仍保持所有辐射边皆正，只是外边中有某些为负. 这等同于 A_nA_1 为正时，即 1 中的某种情形；

3）内边中有奇数个负边时：

①B_nB_1 为负，且另外还有内边为负，比如，$B_1B_2, B_2B_3, \cdots, B_{i-1}B_i$ 为正，B_iB_{i+1} 为负，可连续扭转 $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_i, B_i$，使外边中只有 A_iA_{i+1} 为负，保持所有辐射边皆正，而内边中负边数减少 2，且 B_iB_{i+1} 为正. 这就是说，它等同于 B_nB_1 为正的某种情形.

在内边中只有 B_nB_1 为负，其余皆正时，是一种独立情形.

②B_nB_1 为正，从 $n-1$ 个内边中任选奇数个（为负边），共 $\sum\limits_{j=0}^{[\frac{n}{2}]-1} C_{n-1}^{2j+1} = 2^{n-2}$ 个. 当 n 为奇数时，由于对称性，其中每个选法都恰好重复一次. 这时负边分布情形为 $\frac{1}{2} \cdot 2^{n-2} = 2^{n-3}$ 个；当 n 为偶数时，负边分布也几乎都有重复，只在 B_nB_1 的对边为负，且其余偶数个负边对称分布（共 $\sum\limits_{k=0}^{(n-2)/2} C_{n-2}^k = \frac{1}{2}(2^{n-2} + C_{n-2}^{(n-2)/2})$ 种情形）除外. 此时，负边分布情形为 $\frac{1}{2}[2^{n-2} + \frac{1}{2}(2^{n-2} + C_{n-2}^{(n-2)/2})] = 2^{n-3} + 2^{n-4} + \frac{1}{4}C_{n-2}^{(n-2)/2}$ 个.

综上所述，所论图式流形的同胚类的总数为：

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\Phi(d) \cdot 2^{\frac{n}{d}} + \beta\right) + 2^{n-3} + 1 + \frac{(-1)^n + 1}{2}\left(2^{n-4} + \frac{1}{4}C_{n-2}^{(n-2)/2}\right), \quad n \geqslant 3 \text{ 且 } n \neq 4,$$

其中 $\Phi(d)$ 和 β 如定理所述，$[\alpha]$ 表示实数 α 的整数部分.

注：当 $n = 4$ 时，图式流形“过分”对称，成为“正方体”的一维骨架的平面图. 其“辐射边”与内外边无需区别. 在用此公式时，需再减去重复数.

参考文献

1　Liu Yaxing, Li Qisheng. Graphlike. Manifolds Chinese Journal Math, 1994, 9 (4): 46～51.

2　Yuan Fuyong. A simple method for computing the homeomorphism class of $G.M.\triangle$ and $G.M.\boxtimes$. Chinese Journal of Math, 1996, 11 (1): 76～77.

3　Yuan Fuyong. The Homeomorphism Classfication of $G.M.\circledast_{2k+2\ \text{vertices}}$. Chinese Quar of Math, 1996, 11 (2): 60～63.

4　Yuan Fuyong, Liu Yaxing. On graphlike manifolds with contraction ⬠. Chinese Journal of Math, 1996, 11 (2): 93～94.

（责任编辑：黎贞崇）