DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.002
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 243~245

极小子群与 p-幂零性
On Minimal Subgroups and p-nilpotency of Finite Groups

钟祥贵
Zhong Xianggui
(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 利用极小子群及 4阶循环子群的“C-正规”性得到有限群 p-幂零性的若干结果,推广了一些著名定理,如 Itô定理等,也使文献 [10]中的主要结果得到进一步推广.
关键词 有限群 极小子群 p-幂零群 C-正规子群
中图法分类号 O 152.1

Abstract Using C-normality of minimal subgroups and the cyclic subgroups of order 4, we obtain some new characterizations of p-nilpotent groups. Our results generalize some famous theorems such as Itô Theorem, and improve the main results in [10].
Key words finite group, minimal subgroup, p-nilpotent group, C-normal subgroup

关于有限群 G的极小子群对群 G的结构的影响的研究是有限群研究的重要课题之一. Itô曾证明:如果对某个奇素数 p, G的每个极小 p子群在 G之中心里,那么 G是 p-幂零的.这是关于极小子群的最著名的定理之一[1].自此以后,一系列文章针对这一结果的各方面推广进行研究.在此我们仅提及其中比较有影响的三个方面.

一方面,人们探求将上述结果局部化.李世荣在文献 [2,3]等文章中系统研究了有限群 G的 Sylow p-子群 S的极小子群与 S的正规化子 $N_G(S)$之间的关系,获得了关于 Itô定理的一系列深刻推广,比如:

(1)设 p是一个固定的素数,S是 G的一个 Sylow p-子群,假设 S的每个极小子群含于 $Z(N_G(S))$.若 $p=2$,还假设 S的每个 4阶循环子群正规于 $N_G(S)$,则 G是 p-幂零的.

(2)设 p是 $|G|$ 的最小素因子,S是 G的一个 Sylow p-子群.如果

(i)$\Omega_1(S)$ 由 $N_G(S)$ 的 p阶拟中心元生成;

(ii)$p=2$时,$\Omega_2(S)$由 $N_G(S)$的 2阶和 4阶拟中心元生成;

那么 G是 p-幂零的.

另一方面,许多数学工作者都研究过 PN-群,即极小子群均正规的有限群,如文献 [4,5]等.

再者,人们围绕将 PN-群中的正规条件减弱为“类正规”,“拟正规”或进一步减弱到“极小子群 X均为 NE-群,即 $X=N_G(X)\cap X^G$”进行研究,获得了丰富的成果,参见文献 [6~8]等.极小子群已成为近些年人们感兴趣的课题之一,其有关的新结果不断地被发现.王燕鸣在文献 [9]中引出“C-正规”的概念,并证明: G的极小子群及 4阶循环子群 $\langle x\rangle$ 在 G中 C-正规(即存在 $K\trianglelefteq G$,使 $G=\langle x\rangle K$且 $\langle x\rangle\cap K\leqslant\langle x\rangle_G$,这里 $\langle x\rangle_G=\mathrm{Core}_G(\langle x\rangle)$是 $\langle X\rangle$ 在 G中的核),则 G是超可解的.如果略去奇阶极小子群,则可以得到 G是 2-幂零的(本文定理 2).

本文利用极小子群及 4阶循环子群的 C-正规性得到有限群 p-幂零性的若干结果,推广了上述 Itô定理,也使文献 [10]中的结果得到进一步推广.

本文考虑的群均为有限.所用符号和术语的意义同文献 [11].另外,设 $Z_\infty(G)=\bigcup_{i=0}^{\infty}Z_i(G)$是 G的超中心,其中 $Z_i(G)$是 G的上中心列的第 i项.

1 主要引理

引理 1[9] 设 G是群,则

1)若 H在 G中 C-正规, $H\leqslant K\leqslant G$,则 H在 K中 C-正规;

2)若 $K\trianglelefteq G$, $K\leqslant H$,则 H在 G中 C-正规当且仅当 H/K 在 G/K中 C-正规.

1999-01-21收稿,1999-04-14修回。

引理 2[12]　若 G为内 p-幂零群,则

1) G的阶为 $p^a q^b$,其中 p、q是不同的素数;

2) $G=PQ$, $P\trianglelefteq G$, P是 G的 Sylow p-子群, Q是 G的非正规 Sylow q-子群, Q循环;

3) $p>2$时, $\exp(P)=p$; $p=2$时, $\exp(P)\leqslant 4$;

4) 若 P为 Abel群,则 P为初等 Abel群;

5) $c\in P\Phi(P)$当且仅当 $[c,b]\neq 1$,其中 b是 Q的生成元;

6) $Z(G)=\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$.

引理 3　设 G为内 2-幂零群,若 G的 2阶子群 $\langle x\rangle$ 在 G中 C-正规,则 $\langle x\rangle\leqslant Z(G)$.

证明　依条件,存在 G的正规子群 K,使 $G=\langle x\rangle K$且 $\langle x\rangle\cap K\leqslant\langle x\rangle_G$.若 $\langle x\rangle\cap K$为 2阶群,则 $\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap K=\langle x\rangle_G$,即 $\langle x\rangle\trianglelefteq G$,从而 $\langle x\rangle\leqslant Z(G)$.若 $\langle x\rangle\cap K=1$,我们来导出一个矛盾:因为此时 G/K是 2阶群,对 G的任一奇阶元 y,有 $y^2\in K$,从而 $y\in K$, $G=PO^2(G)=PK$,其中 $P\in Syl_2(G)$.而 K为 2-幂零,故 G亦然.矛盾.

引理 4　设 G为内 p-幂零群, $\langle x\rangle$ 是 G的 p^n阶子群,若 $\langle x\rangle$ 在 G中 C-正规,则 $\langle x\rangle\trianglelefteq G$.

证明　依条件有: $G=\langle x\rangle K$, $K\trianglelefteq G$, $\langle x\rangle\cap K\leqslant\langle x\rangle_G$.若 $\langle x\rangle\cap K$的阶是 p^n,则 $\langle x\rangle\leqslant K$,此时 $\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap K=\langle x\rangle_G\trianglelefteq G$,引理已成立.若 $|\langle x\rangle\cap K|<p^n$,则 $|G/K|>1$, $1<K<G$,从而 K为 p-幂零,且 $y^{p^i}\in K$, $1\leqslant i\leqslant n$,对任意 $y\in G$成立.若 y为 p'元,则 $y\in K$,从而 $G=PO^p(G)=PK$,其中 $P\in Syl_p(G)$.由 K的 p-幂零性即得 G亦 p-幂零.矛盾.

2　主要结果

定理 1　对某个固定的素数 p,如果 G的每个 p阶子群含于 $Z(G)$, 4阶循环子群在 G中 C-正规,则 G是 p-幂零的.

证明　若结论不成立,设 G是极小阶反例.

首先,依引理 1知, G的子群满足条件,从而 G为内 p-幂零群.由引理 2, $G=PQ$, P, Q性质如引理 2所述.若 $p>2$,则因 $\exp(P)=p$及定理条件, $P\leqslant Z(G)$.从而 $Q\trianglelefteq PQ=G$,矛盾.所以 $p=2$, $\exp(P)\leqslant 4$.

其次,依文献[11]定理 5.5知 P非循环,任取 4阶元 $x\in P$,由引理 4, $\langle x\rangle\trianglelefteq G$,从而 $\langle x\rangle Q<PQ=G$, $\langle x\rangle Q$为 2-幂零, $\langle x\rangle\leqslant C_G(Q)$, $P\leqslant C_G(Q)$.矛盾.

所以极小反例不存在, G为 p-幂零群.

定理 2　若 G的所有 2阶及 4阶循环子群在 G中 C-正规,则 G为 2-幂零.

证明　这是引理 3和定理 1的直接结果.

关于 G的 2-幂零,我们再给出下面的定理.

定理 3　设 P是 G的 Sylow 2-子群,如果 P是 Abel的且 P的每个 2阶子群在 G中 C-正规,则 G为 2-幂零.

证明　定理的条件是子群遗传的.若 G非 2-幂零,设 G是极小阶反例,则 G为内 2-幂零群.由引理 2的 4), P是初等阿贝尔的.再利用引理 3得 $P\leqslant Z(G)$.矛盾.

定理 4　对某个固定的素数 p,设 G的每个极小 p子群包含于 $Z_\infty(G)$, 4阶循环子群在 G中 C-正规,则 G是 p-幂零的.

证明　若定理不成立,设 G为极小阶反例.

(1) G为内 p-幂零群, $p=2$, G的 Sylow 2-子群非循环.

事实上,对 G的任一真子群 H,利用数学归纳法不难验证: $Z_n(G)\cap H\leqslant Z_n(H)$, $\forall n\in N$.从而,对 H的任一 p阶子群 $\langle a\rangle$,有 $\langle a\rangle\leqslant Z_\infty(G)\cap H\leqslant Z_\infty(H)$.由引理 1, H的 4阶循环子群在 H中 C-正规,所以 H满足定理条件,由 G的极小性知, H为 p-幂零.从而 G是内 p-幂零群. $G=PQ$, P, Q性质如引理 2所述.若 $p>2$,则由引理 2的 3)知 $\exp(P)=p$,由条件知 $P\leqslant Z_\infty(G)$.根据文献[1]辅理 12.9知 P为 G的一个直因子.矛盾.所以 $p=2$, G为内 2-幂零群.

(2) G为超可解群.

如若不然,则 G为内超可解群.对 $P\Phi(P)$的任意元 a,首先我们断言 $o(a)=4$.事实上,若 $\exists a\in P\Phi(P)$使 $o(a)=2$,取 $M=\langle a\rangle^G$,则 $M\leqslant P$且 $1<M\Phi(P)\Phi(P)\trianglelefteq G\Phi(P)$.由文献[12]中定理 7.6知 $P\Phi(P)$是 $G\Phi(P)$的极小正规子群,从而 $P=M\Phi(P)=M$.因为对 $\forall g\in G$, a^g为 2阶元,依条件有 $a^g\in Z_\infty(G)$,所以 $P=M\leqslant Z_\infty(G)$,于是由 $G/P\cong Q$幂零知 $G/Z_\infty(G)$幂零.又 G为有限群,故存在 $n\in N$使 $Z_\infty(G)=Z_n(G)$.现在由 $G/Z_n(G)$幂零,我们有 $(G/Z_n(G))_i=1$,对某个 $i\in N$.即 $G_iZ_n(G)/Z_n(G)=1$, $G_i\leqslant Z_n(G)$.据此并考虑到 $G_{i+m}=[G_{i+m-1},G]$,对 m作归纳可得到 $G_{i+m}\leqslant Z_{n-m}(G)$,从而 $G_{i+n}\leqslant Z_0(G)=1$, G幂零.矛盾.故对 $\forall a\in P\Phi(P)$,恒有 $o(a)=4$.由条件及引理 4知 $\langle a\rangle\trianglelefteq G$,从而 $\langle a\rangle Q<G$, $\langle a\rangle Q$幂零, $\langle a\rangle Q=\langle a\rangle\times Q$, $a\in C_G(Q)$,矛盾于引理 2的 5).

以上论证表明: $\forall a\in P$,必有 $a\in\Phi(P)$,从而 P

$=\Phi(P)$.矛盾.

(3) 导出最后的矛盾.

由(1),(2)知 q 为超可解群 G 的最大素因子,从而 $Q \trianglelefteq G$.矛盾.

所以反例 G 不存在. G 为 p-幂零群.

推论 1[10] 设 G 的所有素数阶子群包含于 $Z_{\infty}(G)$, 4阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 是幂零群.

证明 注意到有限群 G 幂零当且仅当对任一素数 $p \mid |G|$, G 都是 p-幂零的.推论 1是定理 4的直接结果.

定理 5 设 $N \trianglelefteq G$, G/N p-幂零,若 N 的 p 阶子群包含在 $Z(G)$ 中且 4阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 是 p-幂零群.

证明 若定理不成立,设 G 为极小阶反例.

(1) 条件是子群遗传的,从而 G 为内 p-幂零群, $p=2$, $G=PQ$ 如引理 2所述.

事实上,对 G 的任一真子群 K,由 G/N p-幂零,故 $K/K\cap N \cong KN/N$ 亦为 p-幂零. $K\cap N$ 的 p 阶子群包含在 $Z(G)\cap K$ 中, $K\cap N$ 的 4阶循环子群在 G 中 C-正规,由引理 1的 1)知它们在 K 中 C-正规.所以 K, $K\cap N$ 满足定理条件,故 K 为 p-幂零,从而 G 为内 p-幂零群.又若 $p>2$,则由引理 2的 3)知 $\exp(P)=p$,从而依条件得 $P\cap N \leqslant Z(G)$,注意到 G/P 幂零, G/N p-幂零.从而 $G/P\cap N \cong G/P\times G/N$ 的一个子群亦为 p-幂零, G 亦然.矛盾.故 $p=2$.

(2) $1<N<G$,从而 N 幂零.这是因为当 $N=1$ 时定理条件表明 G 为 p-幂零.矛盾.当 $N=G$ 时,由定理 1知 G 为 p-幂零.亦矛盾.

(3) 反例 G 不存在.

由(2), N 幂零.可设 $N=N_p\times N_q$,其中 $N_p\in \mathrm{Syl}_p(N)$, $N_q\in \mathrm{Syl}_q(N)$.易见 N_p、N_q 均为 G 的正规子群,从而 $N_p\leqslant P$, $N_q\leqslant Q$.下证 $N_p<P$ 且 $N_q<Q$.若否,设 $N_p=P$,则 $P\leqslant N$.如果 P 是 Abel的,由引理 2的 4), P 为初等 Abel群.依条件得 $P\leqslant Z(G)$.矛盾.如果 P 是非 Abel的,则对 P 的任意 4阶元 x,由引理 4及 G 的极小性得 $<x>Q<G$, $<x>Q$ 为幂零,故 $<x>\leqslant N_G(Q)$,进而 $P\leqslant N_G(Q)$, $Q\trianglelefteq G$.矛盾.从而 $N_p<P$,而 $N_q<Q$ 明显成立.

现在 $N_pQ<G$,故 N_pQ 幂零, $N_pQ=N_p\times Q$,由引理 2的 5)知, $N_p\leqslant \Phi(P)\leqslant Z(G)$,又 $PN_q<G$,从而 $PN_q=P\times N_q$, $N_q\leqslant C_G(P)$, $N_q\leqslant Z(G)$.可见, $N\leqslant Z(G)$,而由条件 G/N p-幂零,故 $G/Z(G)$ p-幂零,进一步 $G/Z(G)$ 幂零, G 亦幂零.矛盾.

所以极小反例 G 不存在, G 必为 p-幂零群.

仿推论 1,利用定理 5可得如下推论.

推论 2[10] 设 $N\trianglelefteq G$, G/N 幂零,若 N 的素数阶子群包含于 $Z(G)$, 4阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 是幂零群.

致谢

衷心感谢导师李世荣教授的精心指导及审校.

参考文献

1 [德]贝·胡佩特.有限群论(中译本).第 1卷第 2分册,福州: 福建人民出版社, 1992.

2 Li Shirong. On minimal subgroups of finite groups. Comm Algebra, 1994, 22: 1913~ 1918.

3 Li Shirong. On minimal subgroups of finite groups (Ⅲ). Comm Algebra, 1998, 26 (8): 2453~ 2461.

4 Buckly J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. Math Z, 1970, 116, 15~ 17.

5 Sastry N. On minimal non-PN -groups. J Algebra, 1980, 65: 104~ 109.

6 Asaad M. Simple groups all of whose second maximal subgroups are (A) -groups. Arch Math, 1988, 50: 5~ 10.

7 任永才.二次极大子群中极小子群和 4阶循环子群拟正规的有限单群.数学学报, 1990, 33: 798~ 803.

8 Li Shirong. On minima non-PE -groups. Journal of Pure and Applied Algebra, 1998, 132: 149~ 158.

9 Wang Yanming. C-normality of groups and its properties. J Algebra, 1996, 180: 954~ 965.

10 王品超,温凤桐等.幂零群的若干充分条件.数学进展, 1998, 27: 331~ 333.

11 徐明曜.有限群导引.北京: 科学出版社, 1987.

12 陈重穆.内外$\sum$群与极小非$\sum$群.重庆: 西南师范大学出版社, 1988.

13 M Asaad, Li Shirong. On minimal subgroups of finite groups (Ⅱ). Comm Algebra, 1996, 24 (14): 4603~ 4606.

(责任编辑: 黎贞崇)