DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.003

广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 246~ 249

一类迭代函数方程的解析解*

Analytic Solutions of a Class of Iterative Functional Equations

刘新和**

Liu Xinhe

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)

(Dept. of Math. & Info., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 设 r 是个给定的正数,用 $D = D_r$ 表示复平面 $\boldsymbol{C}$ 内以原点为心 r 为半径的闭圆盘.令 $\boldsymbol{A}(D,D) = \{f: f$ 为从 D 到 D 的连续映射,并且 $f|D^0$ 解析$\}$.设 $G: D^{n+1} \to \boldsymbol{C}$ 连续 $(n \geqslant 2)$,并且 $G|(D^{n+1})^0$ 解析, $g_1,\cdots,g_n \in \boldsymbol{A}(D,D)$,本文讨论了迭代函数方程 $G(z,f(g_1(z)),\cdots,f^n(g_n(z))) = 0$,给出该方程在 $\boldsymbol{A}(D,D)$ 中有解和有唯一解的条件.

关键词 迭代函数方程 解析解 差商 函数空间 紧致凸集

中图法分类号 O 175.14

Abstract Let r be a given positive number. Denote by $D = D_r$ the closed disc in the complex plane $\boldsymbol{C}$ whose center is the origin and radius is r. Write $\boldsymbol{A}(D,D) = \{f: f$ is a continuous map from D to itself, and $f|D^0$ is analytic$\}$. Suppose $G: D^{n+1} \to \boldsymbol{C}$ is a continuous map $(n \geqslant 2)$, and $G|(D^{n+1})^0$ is analytic. Let $g_1,\cdots,g_n \in \boldsymbol{A}(D,D)$ be given maps. In this paper, we study the iterative functional equation $G(z,f(g_1(z)),\cdots,f^n(g_n(z))) = 0$ and give some conditions for the equation to have a solution and a unique solution in $\boldsymbol{A}(D,D)$.

Key words iterative functional equation, analytic solution, difference quotient, functional space, compact convex set

文献 [1, 2] 分别讨论了迭代函数方程 $f^2(z) = az^2 + bz + c$ 和 $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$,令 $I = [a,b]$ 为紧致区间.文献 [3, 4] 讨论了方程

$$F(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^k(x) = 0, \text{对任意 } x \in I, \quad (1)$$

文献 [5] 讨论了方程

$$F(x) - G(f(x),\cdots,f^n(x)) = 0, \text{对任意 } x \in I, \quad (2)$$

文献 [3~ 5] 给出了方程 (1) 和 (2) 的 C^0 和 C^1 解的存在性和唯一性定理.文献 [6] 讨论了迭代函数方程

$$F(z) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^k(z) = 0, \text{对任意 } z \in C \text{ 使得 } |z| < r_1, \quad (3)$$

(其中 r_1 为正常数),并给出了该方程在原点的邻域内有局部解析解的条件,文献 [7] 讨论了更一般的迭代函数方程

$$G(z,f(z),\cdots,f^n(z)) = 0, \text{对任意 } z \in D \quad (4)$$

(其中 D 为复平面 $\boldsymbol{C}$ 的闭圆盘),在较弱的条件下证明了该方程解析解的存在性和唯一性.

设 r 是给定的正数,用 $D = D_r = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| \leqslant r\}$ 表示复平面 $\boldsymbol{C}$ 内以原点为中心 r 为半径的闭圆盘, $D^0 = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| < r\}$ 表示 D 的内部,对 $\boldsymbol{C}$ 的任一子集 K 及任一整数 $m \geqslant 1$,记

$$\boldsymbol{A}(D^m,K) = \{\varphi: \varphi \text{ 为 } D^m \text{ 上的连续的复值函数}, \varphi(D^m) \subset K, \text{且 } \varphi|(D^m)^0 \text{ 解析}\} \quad (5)$$

本文将讨论下列迭代函数方程的解析解的存在性和唯一性:

$$G(z,f(g_1(z),\cdots,f^n(g_n(z))) = 0, \text{对任意 } z \in D, \quad (6)$$

其中 $G \in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C}), g_1,\cdots,g_n \in \boldsymbol{A}(D,D)$ 均为给定的函数, $n \geqslant 2$,且 f 为未知函数.

1 解析函数的差商、微商及复合

对任一 $z \in \boldsymbol{C}$ 和 $W \subset \boldsymbol{C}$,以 $\mathrm{Re}(z)$ 表示 z 的实部, $\overline{W}$ 表示 W 在 $\boldsymbol{C}$ 中的闭包,并记 $zW = \{zw: w \in W\}$, $\mathrm{Re}(W) = \{\mathrm{Re}(w): w \in W\}$.对任一集合 Y 及任一函数 $\varphi: Y \to \boldsymbol{C}$,记 $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(w)|: w \in Y\}$,称 $\|\varphi\|$ 为 φ 的 C^0 范数.

设 W 是 $\boldsymbol{C}$ 的路连通子集, $\varphi: W \to \boldsymbol{C}$ 是个连续函

1999-07-09收稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

* * 广东中山大学与汕头大学联合培养博士生。

数. 对任意 W 中的两点 $z\neq w$, 称 $(j(z)-j(w))/(z-w)$ 为 j 的一个差商, 记

$\Lambda_j=\{(j(z)-j(w))/(z-w): z,w\in D, z\neq w\}$, (1.1)

称 Λ_j 为 j 的差商集, 显然, Λ_j 为 $\boldsymbol{C}$ 的连通子集, 令

$\lambda_j=\lambda(j)=\sup\{|w|: w\in\Lambda_j\}$. (1.2)

对任意 $f\in \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$, 以 f' 表示 f 的微商, 则 f' 也是个解析函数, 值得注意的是 f' 的定义域是 D^0 而不是 D. 对任一 $z\in D^0$, 我们有时也把函数值 $f'(z)$ 记为 $\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z$.

引理 **1.1**[7] 设 $f\in \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$, 则 $f'(D^0)\subset\overline{\Lambda}_f$, 且 $\lambda_f=\|f'\|$.

对任意 $f,g\in A(D,\boldsymbol{C})$ 和 $s,t\in \boldsymbol{C}$, 定义映射 $sf+tg$: $D\to \boldsymbol{C}$ 为 $(sf+tg)(z)=sf(z)+tg(z)$ (对任意 $z\in D$). 如所周知, 在该运算之下, $A(D,\boldsymbol{C})$ 是个线性空间.

设 $n\geqslant 2$, 对任意 $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$ 和 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$, 以 G'_k 表示 G 的第 k 个一阶偏微商, 其定义为 $G'_k(z_0,z_1,\cdots,z_n)=\partial G(z_0,z_1,\cdots,z_n)/\partial z_k$, 对任 $(z_0,z_1,\cdots,z_n)\in(D^{n+1})^0$, 则 G'_k 也是个解析函数, 其定义域是 $(D^{n+1})^0$ 而不是 D^{n+1}. 记

$$\Lambda_{KG}=\left\{\frac{G(z_0,\cdots,z_k,\cdots,z_n)-G(z_0,\cdots,z_{k-1},z_k,z_{k+1},\cdots,z_n)}{z_k-w_k}:\right.$$
$(z_0,\cdots,z_k,\cdots,z_n)\in D^{n+1}, w_k\in D-\{z_k\}\}$, (1.3)

$\lambda_{kG}=\sup\{|w|: w\in\Lambda_{kG}\}$. (1.4)

类似于引理 1.1, 我们有

引理 **1.2** 对任一 $G\in \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 和 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$, $G'_k((D^{n+1})^0)\subset\overline{\Lambda}_{kG}$, 且 $\lambda_{kG}=\|G'_k\|$.

注 **1.1** 若 D 不是 $\boldsymbol{C}$ 的凸子集, 则引理 1.1和 1.2一般不成立.

对任意 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$ 及 $k\geqslant 0$, 以 f^k 表示 f 的 k 次迭代, 其定义为 $f^0=id$ (其中 id 为 D 的恒等映射), $f^1=f$, 对 $k\geqslant 2$, $f^k=ff^{k-1}$ 是 f 与 f^{k-1} 的复合.

对任意的 $n+1$ 个函数 $f_0,f_1,\cdots,f_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$ 和任一 $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, 定义复合映射 $G(f_0,f_1,\cdots,f_n)$: $D\to \boldsymbol{C}$ 为

$G(f_0,f_1,\cdots,f_n)(z) = G(f_0(z),f_1(z),\cdots,f_n(z))$,

对任意 $z\in D$. (1.5)

类似于文献 [7]中的引理 1.3, 我们有

引理 **1.3** 设 $f,g,g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, 则 $gf\in \boldsymbol{A}(D,D)$, 并且 $G(f^0,f^1g_1,\cdots,f^ng_n)\in \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$.

据引理 1.3, 对任意 $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$ 及 $g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, 我们可以定义映射 $G^*: \boldsymbol{A}(D,D)\to \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 为

$G^*(f)=G(f^0,f^1g_1,\cdots,f^ng_n)$, 对任意 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$. (1.6)

2 方程 (6) 的解与映射 $\Psi_{\partial G}$ 的不动点

设 $n\geqslant 2$, $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, $g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, 对任一实数 $W\neq 0$, 定义映射 J_{WG}: $\boldsymbol{A}(D,D)\to \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 为

$J_{WG}(f)=f-WG(f^0,f^1g_1,\cdots,f^ng_n)$, 对任意 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$, (2.1)

容易看出 f 为 J_{WG} 的不动点当且仅当 f 是方程 (6) 的解析解. 因此, 方程 (6) 的求解问题可以转化为 J_{WG} 的不动点问题. 本文将用如下的定理去判定映射 J_{WG} 的不动点. 该定理可在文献 [8]中找到.

定理 **A**(Schauder-Tychonoff) 设 X 是局部凸的线性拓扑空间的紧致凸集, 则任一连续映射 J: $X\to X$ 均有不动点.

当我们试图用上述定理去判定映射 J_{WG} 是否有不动点时, 我们需要在 $\boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 上引进合适的度量, 需要寻找 $\boldsymbol{A}(D,D)$ 的在 J_{WG} 之下不变的紧致凸子集. 我们采用 $\boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 上的 C^0 度量, 其定义为

$d(f,g)=\sup\{|f(z)-g(z)|: z\in D\}$, 对任意的 $f,g\in \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$. 在该度量之下, $A(D,\boldsymbol{C})$ 成为局部凸的线性拓扑空间. 对任一正数 b, 令

$\boldsymbol{A}(D,D;b)=\{f\in \boldsymbol{A}(D,D): \lambda_f\leqslant b\}$ (2.2)

则 $\boldsymbol{A}(D,D;b)$ 是 $\boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 的凸子集.

命题 **2.1**[7] 在 C^0 度量 d 之下, $A(D,D;b)$ 是个紧致空间.

命题 **2.2** 假设 $G\in A(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, $g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, $W\neq 0$ 为实数, 设 J_{WG}: $\boldsymbol{A}(D,D)\to \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$ 如 (2.1) 式所定义, 则 J_{WG} 在度量 d 之下连续.

证明 据 (2.1) 式, $J_{WG}=id-WG^*$, 其中 id 为 $\boldsymbol{A}(D,D)$ 的恒等映射, G^* 由 (1.6) 式所定义. 因 id 连续, W 为一个常数, 为证 J_{WG} 连续, 我们只要证明 G^* 连续. 考虑任一 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$ 及 $X<0$. 令 $g_0=id_D$. 因 D^{n+1} 紧致, G 一致连续, 故存在 $X'>0$ 使得对任意的 $h_0,h_1,\cdots,h_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, 若 $\max\{\|h_k-f^kg_k\|: k=0,1,\cdots,n\}<X'$, 则 $\|G(h_0,h_1,\cdots,h_n)-G(f^0,f^1g_1,\cdots,f^ng_n)\|<X$. 因 D 紧致, $f,f^2,\cdots,f^n$ 一致连续, 故存在 $X''>0$ 使得对任意 $h\in \boldsymbol{A}(D,D)$, 若 $\|h-f\|<X''$, 则 $\max\{\|h^k-f^k\|: k=0,1,\cdots,n\}<X'$. 注意到 $g_k\in \boldsymbol{A}(D,D)$, $\|h^kg_k-f^kg_k\|\leqslant\|h^k-f^k\|$, $k=1,\cdots,n$. 于是, 当 $\|h-f\|<X''$ 时, $\|G^*(h)-G^*(f)\|=\|G(h^0,h^1g_1,\cdots,h^ng_n)-G(f^0,f^1g_1,\cdots,$

$f^n g_n)\| < X$.这意味着 G^* 在每一个 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$ 处连续.命题 2.2证毕.

3 方程(6)的解析解的存在性和唯一性

定理 3.1 设 $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, $g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$, $\__0 = G(0,0,\cdots,0)$,且 b 为一个正数.若 $\lambda_{1G}<\infty$, $g_1 = id_D$,并且存在模为 1的复数 c使得

(i) $\inf(\mathrm{Re}(c\Lambda_{1G})) > |\__0/r| + \lambda_{0G}+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}$,

(ii) $\inf(\mathrm{Re}(c\Lambda_{1G})) > \lambda_{0G}/b+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\lambda_{g_j}b^{j-1}$,

则方程(6)有一个解 $f_0\in A(D,D;b)$.

证明 若 $c\neq 1$则可以用 cG替代 G.因此不妨假设 $c = 1$.令 $a_0 = |\__0|/r$, $a_1 = \inf(\mathrm{Re}(c\Lambda_{1G}))$,则 $a_1> 0$,据条件(i)和条件(ii)可以选取 $W< 1/\lambda_{1G}$使得

$$W<\frac{2(a_1-a_0-\lambda_{0G}-\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG})}{a_1^2+\lambda_{1G}^2-(a_0+\lambda_{0G}+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG})^2}, \quad (3.1)$$

并且

$$W<\frac{2(a_1-\lambda_{0G}/b-\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\lambda_{g_j}b^{j-1})}{a_1^2+\lambda_{1G}^2-(\lambda_{0G}/b+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\lambda_{g_j}b^{j-1})^2}, \quad (3.2)$$

设 $J_{WG}: \boldsymbol{A}(D,D)\to \boldsymbol{A}(D,\boldsymbol{C})$如(2.1)式所定义,考虑任一 $f\in \boldsymbol{A}(D,D)$.记 $h= J_{WG}(f)$,则对任意 $z\in D$存在 $k_j = k_j(z)\in\Lambda_{jG}(j = 0,1,\cdots,n)$,使得

$$h(z)= f(z)-WG(0,0,\cdots,0)-W[G(z,f(g_1(z)),\cdots,f^n(g_n(z)))-G(0,0,\cdots,0)] = f(z)-W\__0-W\sum_{j=0}^{n}k_j f^j(g_j(z)), \quad (3.3)$$

假设 $k_1 = p+qi$,其中 p 和 q均为实数,并且 $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$,则 $a_1\leqslant p\leqslant \lambda_{1G}$,并且 $q<\lambda_{1G}$.注意到 $|f^j(g_j(z))|\leqslant r$, $|k_j|\leqslant \lambda_{jG}(j = 0,1,\cdots,n)$,以及 $|\__0| = a_0 r$,由(3.3)式可得

$$|h(z)| = |(1-Wp-Wq\boldsymbol{i})f(z)-W\__0-Wk_0 z-W\sum_{j=2}^{n}k_j f^j(g_j(z))|\leqslant (|1-Wa_1-WX_{1G}\boldsymbol{i}|+W(a_0+\lambda_{0G}+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}))r, \quad (3.4)$$

(3.1)式等价于

$$|1-Wa_1-WX_{1G}\boldsymbol{i}|+W(a_0+\lambda_{0G}+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG})<1, \quad (3.5)$$

由(3.4)和(3.5)式可得 $|h(z)|<r$.这意味着 $h(= J_{WG}(f))\in \boldsymbol{A}(D,D)$.由此我们有

$$J_{WG}(\boldsymbol{A}(D,D))\subset \boldsymbol{A}(D,D). \quad (3.6)$$

进一步,若 $f\in A(D,D;b)$,则对任意 $z\in D^0$和 $j\in\{0,1,\cdots,n\}$,据引理 1.1 和 (2.2) 式, $|\mathrm{d}f^j(g_j(z))/\mathrm{d}z| = |f^1(g_j(z))\cdot f^1(f(g_j(z)))\cdot\cdots\cdot f^1(f^{j-1}(g_j(z)))\cdot g'_j(z))|\leqslant \lambda_f^j\lambda_{g_j}\leqslant \lambda_{g_j}b^j$.(3.2)式等价于

$$|1-Wa_1-WX_{1G}\boldsymbol{i}|+W(\lambda_{0G}/b+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\lambda_{g_j}b^{j-1})<1, \quad (3.7)$$

于是由引理 1.2及(3.7)式可得

$$\begin{aligned}|h'(z)| &= |f^1(z)-W\sum_{j=0}^{n}G'_j(z,f(g_1(z)),\cdots,f^n(g_n(z)))\cdot \mathrm{d}(f^j(g_j(z))/\mathrm{d}z|\\ &\leqslant |1-Wa_1-WX_{1G}\boldsymbol{i}f^1(z)|+W\lambda_{0G}+W\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\cdot |\mathrm{d}(f^j(g_j(z)))/\mathrm{d}z|\\ &\leqslant |1-Wa_1-WX_{1G}\boldsymbol{i}|b+W(\lambda_{0G}+\sum_{j=2}^{n}\lambda_{jG}\lambda_{g_j}b^j)\\ &\leqslant b.\end{aligned} \quad (3.8)$$

由(3.8)式和引理 1.1可得 $\lambda_h\leqslant b$.此时由(3.6)式可知 $h= J_{WG}(f)\in \boldsymbol{A}(D,D;b)$.因此我们有

$$J_{WG}(\boldsymbol{A}(D,D;b))\subset \boldsymbol{A}(D,D;b) \quad (3.9)$$

据命题 2.1, $\boldsymbol{A}(D,D;b)$是紧致的.又据命题 2.2, $J_{WG}|\boldsymbol{A}(D,D;b)$是连续的.于是,由(3.9)及定理 A可知 J_{WG}有一个不动点 $f_0\in \boldsymbol{A}(D,D;b)$,它是方程(6)的解析解.定理 3.1证毕.

定理 3.2 设 $G\in \boldsymbol{A}(D^{n+1},\boldsymbol{C})$, $g_1,\cdots,g_n\in \boldsymbol{A}(D,D)$,令 $\_ = \inf\{|w|: w\in\Lambda_{1G}\}$, b为正数.假设 $\lambda_{1G}<\infty$, $g_1 = id_D$,并且存在正数 b及模为 1的复数 c,使得定理 3.1中的条件(i)和(ii)均成立.若下列条件亦成立.

(iii) $\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_{jG}b^k<\_$,

则该方程在 $\boldsymbol{A}(D,D)$中有唯一解 $f_0\in \boldsymbol{A}(D,D;b)$.

证明 据条件(i)、(ii)及定理 3.1可知方程(6)有一个解 $f_0\in \boldsymbol{A}(D,D;b)$.因 $f_0\in \boldsymbol{A}(D,D;b)$,故 $\lambda_{f_0}\leqslant b$,从而 $\lambda(f_0^k)\leqslant\lambda_{f_0}^k\leqslant b^k$, $(k = 1,2,\cdots)$.

假定 $h\in \boldsymbol{A}(D,D)$也是方程(6)的解,取 $v\in D$使得 $|f_0(v)-h(v)| = \|f_0-h\|$.则存在 $k_j = k_j(z)\in\Lambda_{jG}(j = 1,\cdots,n)$使得

$$\begin{aligned}0 &= G(v,f_0(g_1(v)),\cdots,f_0^n(g_n(v)))-G(v,h(g_1(v)),\cdots,h^n(g_n(v)))\\ &= k_1(f_0(v)-h(v))+\sum_{j=2}^{n}k_j(f_0^j(g_j(v))-h^j(g_j(v)))\\ &= |k_1(f_0(v)-h(v))+\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}k_j\cdot(f_0^k f_0 h^{j-k-1}(g_j(v)))-f_0^k h h^{j-k-1}(g_j(v))|\\ &\geqslant |k_1(f_0(v)-h(v))|-\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}|k_j(f_0^k f_0 h^{j-k-1}(g_j(v)))-f_0^k h h^{j-k-1}(g_j(v)))|\\ &\geqslant \_\cdot\|f_0-h\|-\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_{jG}\lambda_{f_0}^k\cdot\|f_0-h\|\end{aligned}$$

$$\geqslant (\_ - \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_{jG}b^{k})\cdot \| f_0 - h\| .$$
(3. 10)

因 $\_ - \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_{jG}b^{k} > 0$, 故由 (3. 10) 式可得 $\| f_0 - h\| = 0$,这意味着 $h = f_0$. 因此方程 (6) 在 $\boldsymbol{A}(D,D)$ 中只有 f_0 这一个解. 定理 3. 2证毕.

4 例

假设 $\_{}_0, T, T_1, T_2, T_3$,均为复数. $g_1 = id_D, g_2, g_3, g_4 \in \boldsymbol{A}(D,D)$ 是给定的函数,并且 $\lambda_{g_2}, \lambda_{g_3}, \lambda_{g_4}$ 均不大于 2. 取 $n = 4$. 设迭代函数方程为

$$\_{}_0 + T_1 z + f(z)(T + z + f^2(g_2(z))f^3(g_3(z))(f^4(g_4(z)))^3) - (f^2 g_2(z))((f^3(g_3(z)))^2 - T_3 z f^4(g_4(z))) + T_2 f^3(g_3(z)) = 0, \quad (4.1)$$

(对任意 $z \in D$),则相应的 G $D^5 \to \boldsymbol{C}$ 的表达式为

$$G(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) = \_{}_0 + T_1 z_0 + T_2 z_1 + z_0 z_1 + z_1 z_2 z_3 z_4^3 - z_2 z_3^2 + T_3 z_3 + T_3 z_0 z_2 z_4, \quad (4.2)$$

对任意的 $p = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \in (D^5)^0$,经计算可得

$$\begin{cases} G'_0(p) = T_1 + z_1 + T_3 z_2 z_4, \\ \wedge_{1G} = \{T + z_0 + z_2 z_3 z_4^3 : (z_0, z_2, z_3, z_4) \in D^4\}, \\ G'_2(p) = z_1 z_3 z_4^3 - z_3^2 + T_3 z_0 z_4, \\ G'_3(p) = z_1 z_2 z_4^3 - 2 z_2 z_3 + T_2, \\ G'_4(p) = 3 z_1 z_2 z_3 z_4^3 + T_3 z_0 z_2, \end{cases} \quad (4.3)$$

假设 $r = 1, |\_{}_0| \leqslant 1, |T_1| \leqslant 1, |T_2| \leqslant 3, |T| \geqslant 2$,则由 (4. 3) 式和引理 1. 2可得 $\lambda_{0G} \leqslant 4, \lambda_{2G} \leqslant 5, \lambda_{3G} \leqslant 5, \lambda_{4G} \leqslant 6$,并且 $\_ (= \inf\{|k| : k \in \wedge_{1G}\}) = |T| - 2$. 取 $c_1 = |T|/T$, 则 $\inf(\mathrm{Re}(c_1 \wedge_{1G})) = |T| - 2$. 此外 $|\_{}_0/r| \leqslant 1$. 把它们代入定理 3. 1和 3. 2中的条件 (i) ~ (iii) 可得

$$I_1 = \inf(\mathrm{Re}(c_1 \wedge_{1G})) - |\_{}_0/r| - \lambda_{0G} - \lambda_{2G} - \lambda_{3G} - \lambda_{4G} \geqslant |T| - 23; \quad (4.4)$$

$$I_2 = \inf(\mathrm{Re}(c_1 \wedge_{1G})) - \lambda_{0G}/b - \lambda_{2G}\lambda_{g_2} b - \lambda_{3G}\lambda_{g_3} b^2 - \lambda_{4G}\lambda_{g_4} b^3 \geqslant |T| - 2 - 4/b - 10b - 10b^2 - 12b^3; \quad (4.5)$$

$$I_3 = \_ - \lambda_{2G}(1 + b) - \lambda_{3G}(1 + b + b^2) - \lambda_{4G}(1 + b + b^2 + b^3) \geqslant |T| - 18 - 16b - 11b^2 - 6b^3; \quad (4.6)$$

若 $|T| > 23, b = \frac{1}{4}$,则 $I_1 > 0, I_2 > 0, I_3 > 0$,于是由定理 3. 1, 3. 2及 (4. 4) ~ (4. 6) 式可得

命题 4. 1 若 $|\_{}_0| \leqslant 1, |T_1| \leqslant 1, |T_2| \leqslant 3, |T| \geqslant 23$,并且 $\lambda_{g_2} \leqslant 2, \lambda_{g_3} \leqslant 2, \lambda_{g_4} \leqslant 2$,则方程 (4. 1) 有一个解 $f_0 \in \boldsymbol{A}(D, D; \frac{1}{4})$, 而且 f_0 是方程 (4. 1) 在 $\boldsymbol{A}(D_1, D_1)$ 中的唯一的解.

致谢

感谢汕头大学数学研究所麦结华教授的指导和鼓励.

参考文献

1 Rice R E, Schweizer B, Sklar A. When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$? . Amer Math Monthly, 1980, 87: 252~263.

2 Mukherjea A, Ratti J S. A functional equation involving iterates of a bijection on the unit interval Ⅱ . Nonlinear Analysis, 1998, 31 (3/4): 459~464.

3 Zhang Weinaian. Discussion on the iterated equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x) = F(x)$. Chin Sci Bul, 1987, 32 (21): 1444~1451.

4 Zhang Weinian. Discussion on the differentiable solutions of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x) = F(x)$. Nonlinear Analysis, 1990, 15 (4): 387~398.

5 司建国. 一类迭代方程的 C^1 解的讨论. 数学学报, 1996, 39 (2): 247~256.

6 司建国. 迭代方程 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(z) = F(z)$ 的局部解析解的存在性. 数学学报, 1994, 37 (5): 590~600.

7 Mai Jiehua, Liu Xinhe. Existence and uniqueness of analytic solutions of iterative functional equations. The Proceedings of 98′ Beijing International Dynamical System Conference, Springer-Verlag, New York: 1999.

8 Dugundji J, Granas A. Fixed Point Theory, Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1982. 1~74.

9 Munkres J R. Topology. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

(责任编辑: 黎贞崇)

中国寒地水稻单本植超高产研究获成功

据华声报 1999年 10月 13日报道: 由黑龙江省农科院绥化农科所于良斌主持的“寒地水稻单本植超高产栽培法”研究, 最近获得成功。采用这种技术, 一平方米只用 75 g 芽种, 插 20来棵水稻秧, 加上一定的栽培措施, 到秋后亩产就可达 700 kg以上。目前这种栽培方法已在黑龙江省 8个县以及辽宁、吉林、河北、江西等省试验成功, 种植面积达 300公顷。