DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.004
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 250~ 252

关于 Bernoulli数的同余关系*
On the Congruences Relation of Bernoulli's Numbers

王云葵
Wang Yunkui

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁市西乡塘 530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 利用等幂和与判别素数的充要条件，获得了 Bernoulli数的同余关系，得到了整除 Bernoulli数分子的判别方法.
关键词 等幂和 同余 Bernoulli数
中图法分类号 O 156

Abstract We make use of necessary and sufficient condition for discriminating prime numbers and sum of equal powers, gain congruences relation of Bernoulli's numbers, We also obtain discriminating method on the exactly divisible numerator Bernoulli's numbers.
Key words sum of equal powers, congruences, Bernoulli's numbers

著名的 Bernoulli数 B_m 是由下列级数定义的有理数:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{B_K}{K!} x^k, \quad (|x| < 2c),$$

其中 $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_{2K+1} = 0 (K \geqslant 1)$.

等幂和 $S_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} K^m$ 是一个古老而有趣的问题，它与 Bernoulli数有着密切的联系:

$$S_m^{(n)} = \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]} C_{m+1}^{2j} B_{2j} n^{m+1-2j}.$$

等幂和与 Bernoulli数在数论研究中占有极为重要的地位.例如它们与丢番图方程[1]、G. Giuga猜想[1]、Bowen猜想[2]及判别素数的充要条件[3]等密切相关.特别地，Bernoulli数在 Fermat大定理的研究中很有用. 1857年 Kummer证明了[4]:

(Ⅰ) $P > 3$为正规素数 $\Leftrightarrow$ P不整除 Bernoulli数 $B_2, B_3, \cdots, B_{P-3}$的每一个数的分子;

(Ⅱ) P为正规素数，则 Fermat大定理成立.

我们在文献[5]中完全确定了 Bernoulli数的分母，在文献[6~ 8]中获得了 Bernoulli数 $B_0 \sim B_{110}$.

本文我们获得了 Bernoulli数之间的一般同余关系，并得到判别正规素数的一些方法.

1 等幂和与 Bernoulli数的同余关系

引理 1[1] $m \geqslant 2$为自然数，则

(1) 当 $P \geqslant 3$为奇数时，$S_{2m}^{(p-1)} \equiv PB_{2m} (\mathrm{mod}\ P)$;

(2) 当 $P = 3$时，$3B_{2m} \equiv 2 - 3m^2 (\mathrm{mod}\ 9)$;

(3) 当 $P = 2$或 $P \geqslant 5$为奇数时，$S_{2m}^{(p-1)} \equiv PB_{2m} (\mathrm{mod}\ P^2)$.

引理 2[1] P为素数，$P - 1 | m$，则 $S_m^{(P-1)} \equiv - m(S_{p-1}^{(p-1)} - P + 1) + P - 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$.

引理 3[5] m为自然数，则对每个素数 P均有 $P \nmid PB_{2m}$ 的分母，并且，当且仅当 $P - 1 | 2m$ 时，$P | (PB_{2m} + 1)$的分子，$P \| B_{2m}$的分母.

引理 4[5] $m \geqslant 1$，设满足 $P - 1 | 2m$的所有素数为 $P_1, P_2, \cdots, P_S$，则 B_{2m} 的分母是 $P_1 P_2 \cdots P_S (S \geqslant 2)$，并且

$$B_{2m} = A_{2m} - \left(\frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_S}\right),$$ 其中 A_{2m}为整数.

引理 5[9] $m \geqslant 1$，则 P为素数的充要条件是，满足:

(1) 当 $P - 1 \nmid m$ 时，$S_m^{(p-1)} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ P)$;

(2) 当 $P - 1 | m$ 时，$S_m^{(p-1)} \equiv - 1 (\mathrm{mod}\ P)$.

定理 1 P为素数，$m \equiv k (\mathrm{mod}\ p(p - 1))$，则

1999-05-11收稿.
* 广西民族学院重点科研基金资助课题.

$S_m^{(p-1)} \equiv S_k^{(p-1)} \pmod{p^2}$.

证明　当 $m=k$ 时结论显然成立，若 $m \neq k$，则必有 $m-k \geqslant P(P-1)$，并且 $P(P-1) \mid m-k$，由 Fermat 小定理，对于 $(a,p)=1$ 有 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod P$，从而有 $P^2 \mid \frac{m-k}{P-1}(a^{P-1}-1)$，由二项式定理有

$a^{m-k} = [(a^{p-1}-1)+1]^{\frac{m-k}{p-1}} \equiv 1 \pmod{p^2}$，

即　$a^m \equiv a^k \pmod{p^2}$.

令 $a=1,2,\cdots,p-1$，并将各式相加则得到

$S_m^{(p-1)} \equiv S_k^{(p-1)} \pmod{p^2}$.

定理 2　$m \geqslant 2$，P 为素数，$P-1 \nmid 2m$，则当 $P \mid m$ 或者 $S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$ 时，必有

$S_{2m}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，

$PB_{2m} \equiv P-1 \pmod{p^2}$.

证明　$P-1 \nmid 2m$，由引理 2 有

$S_{2m}^{(P-1)} \equiv -2m(S_{P-1}^{(P-1)}-P+1)+P-1 \pmod{p^2}$.

由引理 5 必有 $S_{P-1}^{(P-1)}+1 \equiv 0 \pmod p$，故当 $P \mid m$ 或者 $S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$ 时，

$S_{2m}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$.

若 $P=2$ 或 $P \geqslant 5$ 为素数时，由引理 1 得 $PB_{2m} \equiv S_{2m}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$；若 $P=3$，由于 $S_{p-1}^{(p-1)} \not\equiv P-1 \pmod{p^2}$，故当 $3 \mid m$ 时，$3B_{2m} \equiv 2-3m^2 \equiv 2 \pmod 9$，综上可知，总有 $PB_{2m} \equiv P-1 \pmod{p^2}$.

2　Bernoulli 数的同余关系

定理 3　P 为素数，$2 \leqslant k \leqslant m$，若 $2m \equiv 2k \pmod{p(p-1)}$ 或者 $p-1 \nmid 2m$，$p-1 \nmid 2k$，$S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，则有

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod p$.

证明　(1) 若 $2m \equiv 2k \pmod{p(p-1)}$，则当 $p=3$ 时，由引理 1 及 $3m^2 \equiv 3k^2 \pmod 9$ 有

$3B_{2m}+3m^2-2 \equiv 0 \pmod 9$，$3B_{2k}+3K^2-2 \equiv 0 \pmod 9$，故　$3B_{2m} \equiv 3B_{2K} \pmod 9$.

当 $P=2$ 或 $P \geqslant 5$ 为素数时，由引理 1 和定理 1 得 $S_{2m}^{(p-1)} \equiv PB_{2m} \pmod{p^2}$，$S_{2k}^{(p-1)} \equiv PB_{2k} \pmod{p^2}$，$S_{2m}^{(p-1)} \equiv S_{2k}^{(p-1)} \pmod{p^2}$ 故有 $PB_{2m} \equiv PB_{2K} \pmod{p^2}$.

(2) 若 $P-1 \nmid 2m$，$P-1 \nmid 2k$，$S_{P-1}^{(p-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，则由定理 2 得

$PB_{2m} \equiv PB_{2K} \equiv P-1 \pmod{p^2}$.

综合 (1)(2) 知，对满足条件的素数 P 均有

$PB_{2m} \equiv PB_{2K} \pmod{p^2}$，即 $B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod p$.

定理 4　若 $2 \leqslant k \leqslant m$，则必有

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod 2$，$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{10}$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{130}$.

证明　因为当 $P=2,5,13$ 时 $S_{p-1}^{(p-1)} \equiv p-1 \pmod{p^2}$，故由定理 3 有

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod 2$，

$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod 5$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{13}$.

注意到必有 $B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod 2$，故 $B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{10}$，同理，$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{130}$.

定理 5　$2 \leqslant k \leqslant m$，$m^2 \equiv k^2 \pmod 3$，则必有

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod 6$，

$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{30}$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{390}$.

证明　由引理 1 及 $3m^2 \equiv 3k^2 \pmod 9$ 有

$3B_{2m}+3m^2-2 \equiv 0 \pmod 9$，$3B_{2k}+3k^2-2 \equiv 0 \pmod 9$，

故　$3B_{2m} \equiv 3B_{2K} \pmod 9$，$B_{2m} \equiv B_{2K} \pmod 3$，再由定理 4 即得证.

另外，根据定理 3～定理 5 则立即得到：

定理 6　$2 \leqslant k \leqslant m$，若存在奇素数 P 使得 $2m \equiv 2k \pmod{p(p-1)}$ 或者 $p-1 \nmid 2m$，$p-1 \nmid 2K$，$S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，则

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod{2p}$，$(P \geqslant 3)$，

$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{10p}$，$(P \neq 5)$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{130p}$，$(P \neq 5,13)$.

定理 7　$2 \leqslant k \leqslant m$，$m^2 \equiv k^2 \pmod 3$，若存在奇素数 P 使得 $2m \equiv 2k \pmod{p(p-1)}$ 或者 $p-1 \nmid 2m$，$p-1 \nmid 2K$，$S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，则

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod{6p}$，$(P>3)$，

$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{30p}$，$(P>5)$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{390p}$，$(P \neq 3,5,13)$.

对于同分母的 Bernoulli 数，有更强的结果.

定理 8　$2 \leqslant k \leqslant m$，若 B_{2m} 与 B_{2k} 的分母相同，则 $B_{2m}-B_{2k}$ 为整数，并且

$B_{2m} \equiv B_{2k} \pmod 6$，

$B_{4m} \equiv B_{4k} \pmod{30}$，

$B_{12m} \equiv B_{12k} \pmod{390}$.

证明　由于 B_{2m} 与 B_{2k} 的分母相同，由引理 4 知，$B_{2m}-B_{2k}=A_{2m}-A_{2k}$ 为整数，并且它们的分母中要么都有因子 7，要么都无因子 7，由引理 3，必有 $6 \mid 2m$ 且 $6 \mid 2k$ 或 $6 \nmid 2m$ 且 $6 \nmid 2k$，即有 $m^2 \equiv k^2 \pmod 3$，再由定理 5 即得证.

定理 9　$2 \leqslant k \leqslant m$，$B_{2m}$ 与 B_{2k} 的分母相同，若存在奇素数 P 使得 $2m \equiv 2k \pmod{p(p-1)}$ 或者 $p-1 \nmid 2m$，$p-1 \nmid 2K$，$S_{P-1}^{(P-1)} \equiv P-1 \pmod{p^2}$，则 $B_{2m}-$

B_{2k} 为整数，并且

$$B_{2m} \equiv B_{2k} (\bmod\ 6p), (P > 3),$$

$$B_{4m} \equiv B_{4k} (\bmod\ 30p), (P > 5),$$

$$B_{12m} \equiv B_{12k} (\bmod\ 390p), (P \neq 3, 5, 13).$$

证明　由定理 3和定理 8即得证.

3 整除 Bernoulli数分子的判别方法

定理 10　$r \geqslant 1, k \geqslant 0, P$ 为奇素数，则

$$B_{P(P-1)k+2r} \equiv B_{2r} (\bmod\ p).$$

证明　在定理 3中令 $2m = p(p-1)k+2r$. 即得证.

利用定理 10可以判别 Bernoulli数的整除性. 例如由 $7 | B_{14}$，则有 $B_{14(3K+1)} \equiv 0 (\bmod\ 7) (K \geqslant 0)$. 再如素数 $P \leqslant 131$ 内只有 6个非正规素数，即 $37 | B_{32}$, $59 | B_{44}$, $67 | B_{58}$, $101 | B_{68}$, $103 | B_{24}$, $131 | B_{22}$，故

$$B_{36\cdot 37K+32} \equiv B_{32} \equiv 0 (\bmod\ 37) \quad (K \geqslant 0),$$

$$B_{58\cdot 59K+44} \equiv B_{44} \equiv 0 (\bmod\ 59) \quad (K \geqslant 0),$$

$$B_{66\cdot 67K+58} \equiv B_{58} \equiv 0 (\bmod\ 67) \quad (K \geqslant 0),$$

$$B_{100\cdot 101K+68} \equiv B_{68} \equiv 0 (\bmod\ 67) \quad (K \geqslant 0),$$

等等.

参考文献

1 邓培民，王云葵. 关于伯努利数结构的讨论 (续). 广西师范大学学报，1996, 14 (4): 1- 5.

2 王云葵. 等幂和与波文猜想. 广西教育学院学报，1998, (1): 104- 111.

3 王云葵. 伯努利数与判别素数的充要条件. 广西民族学院学报，1998, 4 (1): 11- 13.

4 胡作玄. 350年历程—— 从费尔马到维尔斯. 济南: 山东教育出版社，1996. 121- 130.

5 邓培民，王云葵. 关于伯努利数结构的讨论. 广西师范大学学报，1995, 13 (4): 4- 9.

6 王云葵. 等幂和的拓广与伯努利数的计算. 广西教育学院学报，1997, (1): 97- 105.

7 王云葵. 等幂和 M— N表示的简捷方法. 全国第四届初等数学研究学术交流会论文集，1999. 214- 220.

8 王云葵，周 科. 关于等幂和与 Bernoulli数的通解公式. 广西大学学报，1999年增刊. 68- 70.

9 王云葵. 等幂和与判别素数的充要条件. 数学通报，1996, (6): 46- 47.

(责任编辑: 黎贞崇)

西南医院转基因猪皮研究获重大突破

据科技日报 1999年 10月 21日报道: 由第三军医大学西南医院烧伤研究所吴军教授领衔攻关的“烧伤病人移植用转基因猪皮的制备及商品化研究”获重大突破。10月上旬，这项具有自主知识产权的技术通过了科技部重点科技攻关生物医学工程专题论证，并获得资助。

烧伤移植用转基因猪皮是选择适宜的诱导免疫耐受基因，通过某个载体将其转入猪皮，使猪皮产生与人皮结构相近的细胞因子。由于猪在解剖、组织、生理和营养代谢等方面与人类最为相近，特别是猪皮在结构、理化特性及功能等方面均与人类的皮肤极为相似，且猪的体表面积大，皮源丰富，因此，选定猪作为异种皮的供体，通过诱导免疫耐受基因直接转染猪皮使其达到满意效果，再综合运用一系列生物技术，制备成功长期、甚至终身不被人体所排斥的、能安全应用于临床的转基因猪皮，就能从根本上解决烧伤创面覆盖的难题。

由吴军教授领衔的此项攻关项目，即是通过筛选低免疫原性、低内源性病毒水平、皮肤构造与人类皮肤最为接近的猪品种或品系，通过将人的淋巴细胞系移植到猪体内或将猪皮移植于 T、B细胞免疫缺陷，构建其皮内靶向可控性表达载体，并最终制备出满意的转基因猪皮。这项技术经过小范围的临床应用，已取得了令人满意的效果。具有存活时间长、抗排斥和较强免疫功能等特性。

中华烧伤学会主任委员肖光夏教授认为，转基因猪皮的研制成功，给烧伤医学带来了新的革命，使其不再依靠异体皮。而使用乳猪皮，对预防疤痕形成有一定作用，且成本大大低于异体皮，因而具有广阔的临床应用前景，同时也是对人类的一项新贡献。