DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 256~258

一类二阶非线性微分方程概周期解的存在唯一性*

On the Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solutions for Some Nonlinear Second Order Differential Equations

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math. & Comp. Sci. Guangxi Normal Univ. 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 应用构造 Liapunov函数的方法,在限制条件较弱的情形下,研究了一类二阶非线性系统概周期解的存在唯一性.
关键词 非线性系统 Liapunov函数 概周期解 存在唯一性
中图法分类号 O 175

Abstract The existence and uniqueness of almost periodic solutions for some nonlinear second order differential system under weaker conditions is discussed by using the method of Liapunov function.
Key words nonlinear differential system, Liapunov function, almost periodic solution, existence and uniqueness

由于实际问题的需要,对非线性微分系统解的各种性态的研究,一直是人们关注的课题.本文考虑下述非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{h}(x)h(y) - F(x) + E(t), \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{1}$$

概周期解的存在唯一性.其中 $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$, $E(t) = \int_0^t e(s)\,ds$, h, h, f, g 均连续且满足解的存在唯一性条件.$e(t)$ 为实连续概周期函数(有关概周期函数的定义参见文献[1]),$E(t)$ 也是连续有界的.如果 $\mathrm{h}(x) = 1, h(y) = y$,则系统(1)等价于下述强迫 Lȇnard方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t), \tag{2}$$

文献[2]在 $F(x) \to \infty\ (x \to \infty)$ 以及 $G(x) = \int_0^x g(u)du \to \infty\ (x \to \infty)$ 的条件下研究系统(2)概周期解的存在性.文献[3,4]结合定性理论的方法研究一类二阶非自治系统概周期解的存在性和唯一性.本文直接应用构造 Liapunov 函数的方法研究系统(1)概周期解的存在性、唯一性以及稳定性,与相关文献相比,限制条件较弱,证明也较为简洁.

1998-11-09收稿.
* 广西自然科学基金资助课题(9811021).

为证明的方便,我们先叙述有关定理.

考虑微分系统

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{3}$$

其中 $f(t,x) \in C(R \times S_{B^*}, R^n)$, $S_{B^*} = \{x, |x| < B^*\}$, B^* 为正常数.假设 $f(t,x)$ 是关于 t 对 x 的一致概周期函数,系统(3)的相伴系统为

$$\dot{x} = f(t,x), \dot{y} = f(t,y). \tag{4}$$

定理 A[1] 假定存在定义在 $0 \leqslant t < \infty, |x| < B^*, |y| < B^*$ 上的 Liapunov函数 $V(t,x,y)$,满足下述条件

(i) $a(|x - y|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant b(|x - y|)$,其中 $a(r)$ 和 $b(r)$ 是连续、递增和正定的;

(ii) $|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)| \leqslant k(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$,这里 $k > 0$ 是常数;

(iii) $\dot{V}_{(4)}(t,x,y) \leqslant -c(|x - y|)$,这里 $c(r)$ 是连续正定的.

此外,假设系统(3)存在一个有界解 $\mathrm{h}(t)$, $|\mathrm{h}(t)| \leqslant B < B^*$ 对于 $t \geqslant 0$ 成立,则在区域 $R \times S_{B^*}$ 上,系统(3)存在唯一的一致渐近稳定的概周期解.

下面叙述本文的主要结果.

定理 1 假设下述条件成立

(I) 对任意的 x,连续有界函数 $\mathrm{h}(x) \geqslant \mathrm{h}_0 > 0$.存在常数 $L > 0$ 使得 $f(x) > 0\ (|x| > L)$, $xg(x) >$

$0(|x|>L)$以及 $G(x)=\int_0^x \frac{g(u)}{\mathrm{h}(u)}du>0(|x|>L)$;

(Ⅱ) $H(y)=\int_0^y h(u)du>0(y\neq 0)$ 且 $H(y)\to\infty(y\to\infty)$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(|F(x)|+G(x))=+\infty$.

则系统(1)存在有界解.

证明　假设 $(x,y)=(x(t),y(t))$ 是系统(1)的一个解.由条件(Ⅰ)知存在一个常数 $b>L$ 使得 $F(b)=\int_0^b f(x)dx>\_$(这里 $\_=\sup\limits_{t\in R}|E(t)|$).取定适当大的正数 $a(a>b)$,当 $0\leqslant t<+\infty$, $x^2+y^2>a^2$ 时考虑函数

$$U(x,y)=H(y)+G(x), \tag{5}$$

计算 $U(x,y)$ 关于系统(1)的全导数得

$$\dot U_{(1)}(x,y)=-h(y)g(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)}(\mathrm{h}(x)h(y)-F(x)+E(t))=-\frac{g(x)F(x)}{\mathrm{h}(x)}+\frac{g(x)E(t)}{\mathrm{h}(x)},$$

由 $a>b$ 以及 $\mathrm{h}(x)>0$ 可知当 $x>a$ 时有

$$\dot U_{(1)}(x,y)\leqslant\frac{1}{\mathrm{h}(x)}(-g(x)F(x)+\_g(x))<0, \tag{6}$$

既然 $H(y)\to\infty(y\to\infty)$ 则 $U(x,y)=H(y)+G(x)\to\infty(y\to\infty)$,结合(6)式利用文献[1]中定理8.8立即推知 $y(t)$ 有界.为了说明 $x(t)$ 的有界性,考虑两种情形

① $G(x)\to\infty(x\to\infty)$.则 $U(x,y)=H(y)+G(x)\to\infty(x\to\infty)$,同样结合(6)式利用文献[1]中定理8.8可知 $x(t)$ 是有界的.

② $G(x)\to G_0<+\infty(x\to\infty)$,则由条件(Ⅲ)知 $F(x)\to\pm\infty(x\to\pm\infty)$.既然 $y(t)$ 有界,则 $h(y)$ 是有界的.我们选取 $T(T>a)$ 适当大使 $x>T$ 时有

$$(f(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})F(x)\geqslant\_(f(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})+f(x)\mathrm{h}(x)h(y), \tag{7}$$

考虑函数

$$W(x,y)=H(y)+F(x)+G(x), \tag{8}$$

由假设条件(Ⅲ)知 $W(x,y)\to+\infty(x\to+\infty)$,并且

$$\begin{aligned}\dot W_{(1)}(x,y)=&-(f(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})F(x)+(f(x)\\&+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})E(t)+f(x)\mathrm{h}(x)h(y)\\\leqslant&-(f(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})F(x)+\\&\_(f(x)+\frac{g(x)}{\mathrm{h}(x)})+\\&f(x)\mathrm{h}(x)h(y)\\\leqslant&\ 0.\end{aligned}$$

故知 $x(t)$ 正向有界.如果 $x<-T$,考虑函数

$$V(x,y)=H(y)-F(x)+G(x), \tag{9}$$

同样可证 $x(t)$ 是负向有界的.综合以上讨论可知存在常数 $A^*>0$ 使 $|x(t)|<A^*$, $|y(t)|<A^*$ $(t\in R)$.

现在考虑系统(1)的相伴系统

$$\begin{cases}\dot x=\mathrm{h}(x)h(y)-F(x)+E(t),\\\dot y=-g(x),\\\dot u=\mathrm{h}(u)h(v)-F(u)+E(t),\\\dot v=-g(u),\end{cases} \tag{10}$$

对 $|x(t)|<A^*$, $|y(t)|<A^*$, $|u(t)|<A^*$, $|v(t)|<A^*$,记

$$A=A(t,x,y,v)=\begin{cases}\frac{\mathrm{h}(x)(h(y)-h(v))}{y-v}, & y\neq v,\\\mathrm{h}(x)h'(y), & y=v.\end{cases}$$

$$B=B(t,x,u)=\begin{cases}\frac{F(x)-F(u)}{x-u}, & x\neq u,\\f(x), & x=u.\end{cases}$$

$$C=C(t,x,u)=\begin{cases}\frac{g(x)-g(u)}{x-u}, & x\neq u,\\g'(x), & x=u.\end{cases}$$

再假设

(Ⅳ) 存在正常数 T_0,T_1,U_0,U_1,V 使对任意 t 有 $0<T_0\leqslant A\leqslant T_1\leqslant 1$, $0\leqslant U_0\leqslant B\leqslant U_1$, $0<C<V(V<U_0^2)$ 以及 $(1-\sqrt{1-(1-A)^2})U_1^2<2C<(1+\sqrt{1-(1-A)^2})U_0^2$.

定理 **2**　假设条件(Ⅰ)~(Ⅳ)成立,则系统(1)存在唯一的一致渐近稳定的概周期解.

证明　由定理1知在假设条件成立时,系统(1)存在有界解 $(x(t),y(t))$ 满足 $|x(t)|<A^*$, $|y(t)|<A^*$ $(t\in R)$.注意到 B 是 t 的函数,文献[5]引理2.2指出,对于满足 $0<U_0\leqslant B\leqslant U_1$ 的 B,方程 $Z'=(B-Z)Z$ 有解 $Z(t)$,对一切 t 满足 $U_0\leqslant Z(t)\leqslant U_1$.为了应用定理A的结论,在 S_{A^*} 上构造 Liapunov 函数

$$V(t)=V(t,x,y,u,v)=\frac{1}{2}((y-v)^2+((y-v)-Z(t)(x-u))^2).$$

易见 $V(t)$ 满足定理A的条件(i)、(ii),现指出,条件(iii)也满足.事实上,注意到 $Z'(t)=(B-Z)Z$,从而 $V(t)$ 关于(10)的全导数为

$$\dot V_{(10)}(t)=-2(y-v)(x-u)\cdot\frac{g(x)-g(u)}{x-u}+Z(x-u)^2\cdot\frac{g(x)-g(u)}{x-u}-(B-Z)Z(x-u)(y-$$

$v) + Z^2(B - Z)(x-u)^2 - Z(y-v)\cdot\frac{h(x)(h(y)-h(v))}{y-v} + Z(x-u)(y-v)\cdot\frac{F(x)-F(u)}{x-u} + Z^2(x-u)(y-v)\cdot\frac{h(x)(h(y)-h(v))}{y-v} - Z^2(x-u)^2\cdot\frac{F(x)-F(u)}{x-u}$

$= -2C(x-u)(y-v) + ZC(x-u)^2 + Z^2(x-u)(y-v) - Z^3(x-u)^2 - ZA(y-v)^2 + Z^2A(x-u)(y-v)$

$$= -Z(Z^2-C)([(x-u)-\frac{(1+A)Z^2-2C}{2(Z^2-C)Z}(y-v)]^2 - \frac{(1-A)^2Z^4-4CZ^2+4C^2}{4(Z^2-C)^2Z^2}(y-v)^2), \quad (11)$$

注意到 $U_0 \leqslant Z$ 且 $0 < C < V(V < U_0^2)$,从而有 $Z^2 - C \geqslant U_0^2 - V > 0$.当 $A \neq 1$时,注意到 $0 \leqslant U_0 \leqslant Z \leqslant U_1$,利用条件(Ⅳ)可得

$$\frac{2C-2C\sqrt{1-(1-A)^2}}{(1-A)^2} < Z^2 < \frac{2C+2C\sqrt{1-(1-A)^2}}{(1-A)^2},$$

故知

$$(1-A)^2Z^4 - 4CZ^2 + 4C^2 < 0, \quad (12)$$

结合(11)、(12)两式即知定理 A的条件(iii)也满足.因此应用定理 A即知系统(1)存在唯一的一致渐近稳定的概周期解.当 $A = 1$,直接由(11)式即知定理 A的条件(iii)满足.因此定理 2的结论成立.

2 实例

例 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (\frac{1}{4} + \sin^2 x)((1-\frac{\sqrt{2}}{4})y + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin y), \\ \quad -2x - \cos t - \cos\sqrt{2}t, \\ \dot{y} = -(xe^{-x^2} + \frac{1}{3}x), \end{cases} \quad (13)$$

这里 $h(x) = \frac{1}{4} + \sin^2 x, h(y) = (1-\frac{\sqrt{2}}{4})y + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin y, H(y) = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8})y^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\cos y > 0(y \neq 0)$ 且 $H(y) \to \infty (y \to \infty)$; $F(x) = 2x, g(x) = xe^{-x^2} + \frac{1}{3}x$, $\frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-x^2} + \frac{2}{15}x^2 \leqslant G(x) \leqslant 2 - 2e^{-x^2} + \frac{2}{3}x^2$, 因此 $G(x) > 0(x \neq 0)$, $|F(x)| + G(x) \to +\infty (|x| \to +\infty)$; $e(t) = \sin t + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ 是实连续概周期函数, $E(t) = -\cos t - \cos\sqrt{2}t$ 连续有界.又由于 $h'(y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\cos y$, 故 $0 < A < 1$; $g'(x) = \frac{1}{3} + (1-2x^2)e^{-x^2}$,故 $0 < C < \frac{4}{3}$;明显地, $0 < B = 2$,因此定理 2的条件满足.从而系统(13)存在唯一的一致渐近稳定的概周期解.

参考文献

1 Yoshizawa T. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性.郑祖庥等译.南宁:广西人民出版社, 1985. 53～64, 186～190.

2 Ezeilo J O. On the existence of almost periodic solutions of some dissipative second order differential equations. Ann Math Pure Appl, 1994, 65 (137): 389～410.

3 姜东平,何崇佑.一类二阶非线性微分方程组的概周期解.南京大学学报(自然科学版), 1981, (4): 419～431.

4 董梅芳.一类非自治系统概周期解的存在唯一性.东南大学学报, 1995, 25 (1): 82～86.

5 林发兴. Lènard方程周期解、概周期解的存在性.数学学报, 1996, 39 (3): 314～318.

6 刘静行.一类非线性微分方程组的概周解.广西师范大学学报, 1994, 12 (3): 21～24.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 255页 Continue from page 255)

6 Huang Lihong, Wang Zhicheng. On the boundedness conditions for solutions of a autonomous differential system. Ann of Dff Eqs, 1996, 12 (1): 60～69.

7 Qian Chuanxi. On global asymptotic stability of second order nonlinear differntial system. Nonl Anal, 1994, 22 (7): 823～833.

8 李惠卿. Lénard方程零解全局渐近稳定的充要条件.数学学报, 1998, 31 (2): 209～214.

9 Villari G. On the qualitative behaviour of solution of Lénard equation. J Diff Eqns, 1987, 67: 269～277.

10 Bo Zhang. On the retarded Lénard equotion. Proc Am Math Soc, 1992, 115 (3): 779～785.

11 Bo Zhang. Boundedness and stability of solution of the retarded Lénard equation with negative damping. Nonl Anal, 1993, 20 (2): 303～313.

(责任编辑: 黎贞崇)