DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (1): 6~ 8, 13

一类退缩的拟线性椭圆方程正解的多重性*

Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Degenerated Quasilinear Elliptic Equations

郭信康

Guo Xinkang

(广西大学数学与信息科学系　南宁市西乡塘路 10号　530004)

(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　讨论一类退缩的拟线性椭圆方程在有界域 $\Omega\subset R^N$ 上的 Dirichlet 问题:

$$(P)\begin{cases} -\nabla\cdot(g(|\nabla u|^{\gamma})|\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u)=\lambda(x)u^m+u^q, u\geqslant 0, u\not\equiv 0, \text{ in }\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

至少有两个正解的存在性,其中 $2<2\gamma<N$, $0<m<1$, $2\gamma<q<q^*-1$, $q^*=\dfrac{2\gamma N}{N-2\gamma}$.

关键词　拟线性椭圆方程　正解　$(PS)_c$ 序列

中图法分类号　O 175.25

Abstract　We obtain at least two positive solutions for the following problems (P):

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(g(|\nabla u|^{\gamma})|\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u)=\lambda(x)u^m+u^q, u\geqslant 0, u\not\equiv 0, \text{ in }\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

where $\Omega\subset R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $2<2\gamma<N$, $0<m<1$, $2\gamma<q<q^*-1$ and $q^*=\dfrac{2\gamma N}{N-2\gamma}$.

Key words　quasilinear elliptic equations, positive solutions, $(PS)_c$ sequence

本文研究下列问题 (P) 的正解存在性:

$$(P)\begin{cases} -\nabla\cdot(g(|\nabla u|^{\gamma})|\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u) \\ \quad =\lambda(x)u^m+u^q, u\geqslant 0, u\not\equiv 0, \text{在 }\Omega\text{ 中}, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^N$ 是一光滑有界区域, N 是欧氏空间的维数.我们在 $W_0^{1,2\gamma}(\Omega)\triangleq E$ 中讨论问题 (P) 弱的正解,即 $u\in E$, $u\geqslant 0$, $u\not\equiv 0$,对任何 $\varphi\in E$ 下面积分恒等式成立:

$$\int_\Omega g(|\nabla u|^{\gamma})|\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla\varphi-\int_\Omega\lambda(x)u_+^m\varphi-\int_\Omega u_+^q\varphi=0, \quad (1)$$

其中 $2<2\gamma<N$, $0<m<1$, $2\gamma<q<q^*-1$, $q^*=\dfrac{2\gamma N}{N-2\gamma}$,它是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 嵌入 L^{q^*} 的临界指数. E 的范数通常规定为 $\|u\|^{2\gamma}=\int_\Omega|\nabla u|^{2\gamma}$, $\forall u\in E$,以后用 $\int$ 代表 $\int_\Omega$,把 $L^s_{(\Omega)}$ 范数记为 $|\cdot|_s$, $u_+\triangleq\max(u,0)$, $u_-\triangleq\min(u,0)$.与问题 (P) 相应的能量泛函是:

$$I(u)=\frac{1}{\gamma}\int G(|\nabla u|^{\gamma})-\int\frac{\lambda(x)}{m+1}u_+^{m+1}-\int\frac{u_+^{q+1}}{q+1}, \quad (2)$$

其中 $G(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau$.

对于任何 $\varphi\in E$, $I(u)$ 的 Frechet 导数是:

$$(I'(u),\varphi)=\int g(|\nabla u|^{\gamma})|\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla\varphi-\int\lambda(x)u_+^m\varphi-\int u_+^q\varphi, \quad (3)$$

对 $g(t)$ 我们假设有:

$H(g)_1$: $g(t)\in C'([0,+\infty),[0,+\infty))$, $g(0)=0$, g 在 R_+^1 上存在 $a,b>0$,成立 $at<g(t)<bt$,且有 $(q+1)a>2\gamma b$;

$H(g)_2$: 满足椭圆条件:令 $G_{ij}\triangleq\dfrac{\partial^2 G(t)}{\partial t_i\partial t_j}$, $t=(t_1,\cdots,t_n)$,存在 $\theta_0,\theta_1>0$ 使

$$\theta_0|t|^{2\gamma-2}|\xi|^2\leqslant G_{ij}(t)\xi_i\xi_j\leqslant\theta_1|t|^{2\gamma-2}|\xi|^2,$$

对任何 $\xi\in R^N$ 成立.对 $\lambda(x)$ 我们有假设:

$H(\lambda)_1$: $\lambda(x)\geqslant 0$, $\lambda(x)\not\equiv 0$, $\lambda(x)\in L^\theta\cap L^\infty$

1999-03-01收稿。

* 广西大学数学与信息科学系科研基金资助。

$$\theta = 2pN/[2pN-(m+1)(N-2p)];$$

$H(\lambda)_2$: 表示 $|\lambda|_\theta$ 是小的,即记

$$\mu \triangleq \frac{|\lambda|_\theta}{(m+1)S^{(m+1)/2p}},\ \nu \triangleq \frac{|\Omega|^{1-(q+1)/q^*}}{(q+1)S^{(q+1)/2p}}, \quad (4)$$

并有

$$\mu\Big[\frac{\mu(2p-m-1)}{\nu(q+1-2p)}\Big]^{\frac{m+1-2p}{q-m}} + \nu\Big[\frac{\mu(2p-m-1)}{\nu(q+1-2p)}\Big]^{\frac{q+1-2p}{q-m}} < \frac{a}{2p},$$

在 (4) 中的 S 是 E 嵌入到 L^{q^*} 的最佳 Sobolev 常数:

$$S = \inf\left\{\frac{\int|\nabla u|^{2p}}{\left(\int|u|^{q^*}\right)^{2p/q^*}}\,\Big|\, u\in E, u\neq 0\right\}. \quad (5)$$

对形状如 (p) 的一类退缩拟线性椭圆方程非平凡解存在问题的讨论我们做过一些工作[1~4],这些工作指出,不管方程右端是临界增长还是次临界增长,它们到少存在一个非平凡解或至少存在一个正解.近期我们讨论了 p-Laplace 方程[5],对此方程右端添加一个次线性项后,除按有关的翻山原理至少可找到一个正解外,还可在 E 的原点附近再找到一个正解,这无疑是很有意义的结果,这样就可提出一个问题,上述结果对在电磁流体力学、渗透理论和生态理论中常遇到的一类退缩拟线性椭圆方程的问题 (P) 是否也会成立?经我们研究可以得出下列结论:

定理 若 $g(t)$ 和 $\lambda(x)$ 分别满足 $H(g)_1$、$H(g)_2$ 和 $H(\lambda)_1$、$H(\lambda)_2$,则问题 (P) 至少有两个正确 $\bar u, \underline{u}$,即 $\bar u \geqslant 0, \underline{u} \geqslant 0$,且 $\bar u \neq 0, \underline{u} \neq 0$,有 $I(\underline{u}) < 0 < I(\bar u)$.

1 引理

引理 1 若 $g(t)$ 和 $\lambda(x)$ 分别满足 $H(g)_1$、$H(g)_2$ 及 $H(\lambda)_1$、$H(\lambda)_2$,则存在 $\rho_0, r_0 > 0$,使 $I(u)|_{\partial B_{\rho_0}} \geqslant r_0 > 0$,其中 B_{ρ_0} 是在空间 E 中,球心在原点,半径为 ρ_0 的球体.

证明 由 $S \leqslant \int|\nabla u|^{2p}/(\int|u|^{q^*})^{2p/q^*}$ 知,

$$|u|_{q^*} \leqslant \|u\|/S^{\frac{1}{2p}}, \quad (6)$$

由 $H(\lambda)_1$ 知,$\lambda(x)\in L^\theta \cap L^\infty$, $|u|^{m+1}\in L^{q^*/(m+1)}$, $\frac{1}{\theta} + \frac{m+1}{q^*} = 1$,由 Holder 不等式知

$$\int\lambda(x)u_+^{m+1} \leqslant (m+1)\mu\|u\|^{m+1}, \quad (7)$$

另外,由

$\frac{1}{q+1} = \frac{\kappa}{2p} + \frac{1-\kappa}{q^*}$,其中 $\kappa = \frac{N}{q+1} - \frac{N-2p}{2p}$,

及插入不等式可得

$$\int u_+^{q+1} \leqslant (|u|_{2p}^{\kappa}|u|_{q^*}^{1-\kappa})^{q+1},$$

而 $|u|_{2p} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{N}}|u|_{q^*}$, $|\Omega|$ 是有界域 Ω 的测度,故

$$\int u_+^{q+1} \leqslant (q+1)\nu\|u\|^{q+1}, \quad (8)$$

另一方面

$$I(u) \geqslant \frac{1}{p}\int G(|\nabla u|^p) - \frac{1}{m+1}\int\lambda(x)u_+^{m+1} - \frac{1}{q+1}\int u_+^{q+1} \geqslant \frac{a}{2p}\|u\|^{2p} - \mu\|u\|^{m+1} - \nu\|u\|^{q+1},$$

记 $R(\rho) \triangleq \rho^{2p}(\frac{a}{2p} - \mu\rho^{m+1-2p} - \nu\rho^{q+1-2p})$,

$\bar R(\rho) \triangleq \mu\rho^{m+1-2p} + \nu\rho^{q+1-2p}$,

当 $\rho \to 0$ 时或 $\rho \to +\infty$ 时都有 $\bar R(\rho) \to +\infty$,故在 $\rho_0 > 0$ 处,$\bar R(\rho)$ 有最小值,并可求出 ρ_0:

$$\rho_0 = \Big[\frac{\mu(2p-m-1)}{\nu(q+1-m-1)}\Big]^{\frac{1}{q-m}} > 0,$$

由 $H(\lambda)_2$ 知,并记

$$r_0 = \rho_0^{2p}\Big(\frac{a}{2p} - \mu\rho_0^{m+1-2p} - \nu\rho_0^{q+1-2p}\Big) > 0.$$

证毕.

引理 2 E 中存在 e, $\|e\| > \rho_0$ 使 $I(e) \leqslant 0$.

证 取 $u_0\in E$, $u_0 \geqslant 0$, $u_0 \neq 0$,且当 $t \to +\infty$ 时有

$$I(tu_0) = \frac{1}{p}\int G(|\nabla tu_0|^p) - \frac{t^{m+1}}{m+1}\int\lambda(x)u_0^{m+1} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int u_0^{q+1}$$
$$\leqslant \frac{bt^{2p}}{2p}\int|\nabla u_0|^{2p} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int u_0^{q+1} \to -\infty,$$

于是可取足够大的 $t = t_0$,取 $e = t_0u_0$,就有 $I(e) \leqslant 0$.

证毕.

由引理 1 和引理 2 知,没有 (PS) 条件的翻山引理[6] 成立,即在 E 中存在序列 $\{u_n\}$ 使

$$I(u_n) \to c, I'(u_n) \to 0, \quad (9)$$

其中 $c = \inf\limits_{r\in\Gamma}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} I(r(t))$, $c \geqslant r_0$,这里

$\Gamma = \{r\in c'([0,1],E) | r(0) = 0, r(1) = e\}$,并称满足 (9) 的序列 $\{u_n\}$ 为 $(PS)_c$ 序列.

引理 3 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 是有界的

证明
$$I(u_n) = \frac{1}{p}\int G(|\nabla u_n|^p) - \frac{1}{m+1}\int\lambda(x)u_{n_+}^{m+1} - \frac{1}{q+1}\int u_{n_+}^{q+1}, \quad (10)$$

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int g(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p - \int\lambda(x)u_{n_+}^{m+1} - \int u_{n_+}^{q+1}, \quad (11)$$

做 $(q+1)I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle$ 运算后并由 (7) 知

$$\frac{q+1}{T}\int G(|5u_n|^T)-\int g(|5u_n|^T)|5u_n|^T \leqslant (q+1)\hat{I}+\|u\|+(g-m)_-\|u\|^{m+1},$$

其中 $\hat{I}\triangleq\sup I(u_n)$,而由 $H(g)_1$,得

$$\frac{q+1}{T}\int G(|5u_n|^T)-\int g(|5u_n|^T)|5u_n|^T\geqslant \left[\frac{(q+1)a}{2T}-b\right]\|u\|^{2T},$$

因此 $\|u_n\|$ 有界.

另外,

$$\langle I'(u_n),u_{n_-}\rangle=\int g(|5u_n|^T)|5u_n|^{T-2}5u_n5u_{n_-}-\int\lambda(x)u_{n_+}^m u_{n_-}-\int u_{n_+}^q u_{n_-}\geqslant\int g(|5u_{n_-}|^T)|5u_{n_-}|^T\geqslant b\int|5u_{n_-}|^{2T}.$$

当 $n\to\infty$ 时有 $\|u_{n_-}\|=0$,故 $u_n\geqslant 0$ 在 K 内几乎处处成立. 由引理 3 及弱紧原理知 $\{u_n\}$ 中存在子列,仍记为 $\{u_n\}$,在 E 中弱收敛于 $u\in E$,且有 $u_n\to u\geqslant 0$ 在 L^{2T} 中成立,从而在 K 内几乎处处成立 $u_n\to u\geqslant 0$.

引理 **4** 若 $Q(t)=\frac{1}{T}G(|t|^T)$, $t=(t_1,\cdots,t_n)$, $|t|^2=\sum t_k^2$,则成立

$$[5Q(t)-5Q(s)]\cdot(t-s)\geqslant\frac{W_0|t-s|^{2T}}{T(2T-1)}. \qquad (12)$$

证明 直接计算有:

$$[5Q(t)-5Q(s)]\cdot(t-s)=\int_0^1\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial Q(s+f(t-s))}{\partial t_i\partial t_j}(t_i-s_i)(t_j-s_j)\,\mathrm{d}f$$

由 $H(g)_2$ 知

$$\frac{1}{T}\int_0^1\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial G(s+f(t-s))}{\partial t_i\partial t_j}(t_i-s_i)(t_j-s_j)\,\mathrm{d}f\geqslant\frac{W_0}{T}\int_0^1|s-f(t-f)|^{2T-2}|t-s|^2\,\mathrm{d}f\geqslant\frac{|t-s|^{2T}}{2T-1}.$$

证毕.

引理 **5** $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 在 E 中有收敛的子列.

证明
$$\langle I'(u_j),h\rangle=\int g(|5u_j|^T)|5u_j|^{T-2}5h-\int\lambda(x)u_{j_+}^m h-\int u_{j_+}^q h, \qquad (13)$$

$$\langle I'(u_k),h\rangle=\int g(|5u_k|^T)|5u_k|^{T-2}5h-\int\lambda(x)u_{k_+}^m h-\int u_{k_+}^q h, \qquad (14)$$

对任何 $h\in E$ 成立. 作 (13) − (14) 运算,并取 $h=u_j-u_k$ 有

$$\int(g|5u_j|^T|5u_j|^{T-2}5u_j-g(|5u_k|^T)|5u_k|^{T-2}5u_k)(5u_j-5u_k)=\langle I'(u_j)-I'(u_k),(u_j-u_k)\rangle+\int\lambda(x)(u_{j_+}^m-u_{k_+}^m)(u_j-u_k)+\int(u_{j_+}^q-u_{k+}^q)(u_j-u_k), \qquad (15)$$

由引理 4 知, (15) 的左端大于 $\frac{W_0}{T(2T-1)}\int|\triangle u_j-5u_k|^{2T}$,且由 $H(\lambda)_1$,知 $\lambda(x)$ 是有界的,再由 $(PS)_C$ 序列的有界性及它们嵌入到 L^{q+1} 空间是紧的,故当 $i,k\to\infty$ 时 (15) 式的右端趋于零,从而有

$$\|u_j-u_k\|_E\to 0.$$

证毕.

2 定理的证明

1. $\bar{u}$ 存在性. 对 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$,由引理 3 4 5 知存在子列,仍记为 $\{u_n\}$ 和 $u\in E$,现记此 u 为 $\bar{u}$,即 $\bar{u}\triangleq u$,使 $u_n\to\bar{u}$ 在 E 中强收敛,且 $\bar{u}\geqslant 0$ 在 K 内几乎处处成立. 由于问题 (P) 属次临界增长,由文献 [7] 知 $\bar{u}$ 是 (P) 的一个正解,即 $I'(\bar{u})=0$, $I(\bar{u})>0$.

2. $\underline{u}$ 的存在性. 设 $h\in E$, $h\geqslant 0$ 和 $t\geqslant 0$ 有

$$I(th)\leqslant\frac{bt^{2T}}{2T}\int|5h|^{2T}-\frac{t^{m+1}}{m+1}\int\lambda(x)h^{m+1},$$

由 $2T>m+1$ 知,当 t 适当小时,有 $I(th)<0$. 而由引理 1 知,存在球 $B=\{u\in E|\,\|u\|\leqslant d_0\}\subset E$,使 $\inf\limits_{u\in\partial B}I(u)>0$,故可取适当小的 t_0 使 $t_0h\in B$,且有 $I(t_0h)<0$,故存在 c: $-\infty<c\triangleq\inf\limits_B I(u)<0$. 设

$$0<X<\inf_{\partial B}I(u)-\inf_B I(u),$$

由著名的 Ekeland 变分原理[8] 用于 $I(u)$: $B\to R$,对任何 $X>0$,存在 $u_X\in B$ 使

$$I(u_X)<\inf_B I(u)+X, \qquad (16)$$

和

$$I(u_X)<I(u)+X\|u-u_X\|, \qquad (17)$$

对任何 $u\in B$,且 $u\neq u_X$ 成立. 从 (16) 知, $I(u_X)<\inf\limits_{\partial B}I(u)$,于是 $u_X\in B$,类似于文献 [5] 有 $\|I'(u_X)\|<X$.

现令 X 变动且趋于零,即得一个序列: $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ 且 $X_n\to 0$,从而得序列 $\{u_{X_n}\}\in\bar{B}$,且当 $X_n\to 0$ 时 $I'(u_{X_n})\to 0$, $I(u_{X_n})\to\underline{C}$,故 $\{u_{X_n}\}$ 是 $(PS)_{\underline{C}}$ 序列,这样重复使用引理 3 4 5 及 $\bar{u}$ 存在性证明方法知 $\{u_{X_n}\}$ 在 E 中强收敛于 $\underline{u}\in\bar{B}$,且在 K 内几乎处处成立 $\underline{u}\geqslant 0$,故 $\underline{u}$ 是问题 (P) 的另一个正解: $I'(\underline{u})=0$, $I'(\underline{u})<0$.

定理证毕.

参考文献

1 沈尧天,郭信康. On the existence of regular critical points of the functional $\int_K F(x\cdot u\cdot ou)\,\mathrm{d}x$. 数学物理学报 (英文版), 1989, 9 (3): 329~336.

(下转第 13页 Continue on page 13)

For $1 < \_ \leqslant 2$, let $f_{\_}(x) = \min\{\_x, \_(1-x)\}$ for any $x \in [0,1]$. Each $f_{\_}$ is so-called the tent map. Like in reference [5], denote by $K(f_{\_})$ the kneading sequence of $f_{\_}$.

Theorem 4.2 (i) $P = \{ j(Z(K(f_{\_}))): 1 < \_ \leqslant 2\}$,

(ii) Let $x \in P$ and $x = j(Z(K(f_{\_})))$ for some $1 < \_ \leqslant 2$. The $d(x) = \_$.

(iii) Let $y \in \sum - P$. Then there exists uniquely an $x \in P$ such that $d(y) = d(x)$.

Proof (i) By Lemma 3.1 we know that an element $x \in \sum$ is primary if and only if $a(h(x))$ is primary in sense of reference [5]. Then by reference [5] and the monotonicity of kneading sequences of tent maps we have the desired conclusion.

(ii) Note that $f_{\_}$ has the topological entropy $h(f_{\_}) = \log\_$ for any $1 < \_ \leqslant 2$. Then, by reference [7] and (ii) of Lemma 4.1, we have $h(f_{\_}) = \log d(x) = \log\_$ and thus $d(x) = \_$.

(iii) Since $y \in \sum - P$, we that $a(h(y))$ is non-primary in the sense of reference [5]. Then there exist a finite primary sequence $P \in M - \{RC\}$ and a $Q \in M - \{C\}$ such that

$$a(h(y)) = P * Q$$

and such a P is unique. Put $x = j(Z(P))$ and $z = j(Z(Q))$. Then by Lemma 3.1 we have $y = S_x(z)$. Thus by (iii) of Lemma 4.1 and Definition 4.1 we have $d(y) = d(x)$. This completes the proof.

For any $1 \leqslant \lambda \leqslant 4$. let $g_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x)$ for any $x \in [0,1]$. By Theorem Ⅲ 1.1 on page 173 in reference [5] we have $\sum = \{ j(Z(K(g_{\lambda}))): 1 \leqslant \lambda \leqslant 4\}$ and then, For any $x \in T$, there exists a $\lambda \in [1, 4]$ such that $K(g_{\lambda}) = a(h(x))$. Let $A_h(x)$ be the matrix induced by $h(x)$ in reference [1]. Then $h(g_{\lambda}) = \log d(A_h(x))$. On the other hand, by reference [7] and (ii) of Lemma 4.1 we have $h(g_{\lambda}) = \log d(x)$. Thus, by (iii) of Theorem 4.2 and Theorem of reference [1] we have

Proposition 4.3 $\overline{d(T)} \equiv \overline{\{d(x): x \in T\}} = \overline{\{d(x): x \in T \cap P\}} = [1,2]$.

References

1 Almeida P, Ramos J S. Symbolic dynamics and norm of 0–1 matrics, European Conference on Iteration Theory (ECIT 91), World Scientific, 1992, 1~7.

2 Zeng Fanping, Xi Hongjian. On lorenz maps of the interval. Acta Math Sinica, 1997, 40(6): 939~946.

3 Devaney R L. An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, New York, 1989.

4 Bernhardt C. Self-similarity maps for the set of unimodal cycles, Intern J Bifurcation and Chaos, 1995, 5 1325~1330.

5 Collet P, Eckmann J P. Iterated maps on the Interval as dynamical systems, Birkhauser Boston, 1980, 176~182.

6 Lanpreia J P, Silva A R, Ramos J S * -product of markov matrices, Slochastica, 1989, XII(2, 3): 149~166.

7 Milnor J, Thurston W. On iterated maps of the interval, Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 1324, 465~563.

(责任编辑: 邓大玉)

(上接第 8页 Continue from page 8)

2 卢建珠, 郭信康. 具临界增长的拟线性椭圆方程混合边值问题的非平凡解. 高校应用数学学报, 1994, 9(4) A: 341~349.

3 冉启康, 郭信康. 带临界增长的拟线性退缩椭圆方程的非平凡解. 广西大学学报 (自然科学版), 1995, 20(4): 337~344.

4 冉启康, 郭信康. 无界域上带临界增长的退缩椭圆方程的非平凡解. 广西大学学报 (自然科学版), 1997, 22(4): 300~307.

5 郭信康. p-Laplace方程正解的多重性. 广西大学学报 (自然科学版), 1999, 24(2): 102~105.

6 Brezis H, Nirenberg L. Positive solution of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Communieations on pure and applied mathematics. 1983, XXXVI 437~477.

7 沈尧天. 拟线性椭圆型方程的多解问题. 数学物理讲座 1 (A), 武汉: 武汉大学出版社, 1985.

8 Michael Struwe variational Methods Springer-Verlag, Berlin Herdelberg New York, 1990.

(责任编辑: 黎贞崇)