DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (1): 14~ 16

关于 Bernoulli数与 Bowen猜想*
On the Bernoulli Numbers and Bowen's Conjecture

王云葵
Wang Yunkui
(广西民族学院数学与计算机科学系　南宁市西乡塘　530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要　获得了等幂和与 Bernoulli数的同余关系，利用所得到的结果对 Bowen猜想进行了讨论，得：若方程 $S_m(n)=(n+1)^m$ 有 $m>1$的解，则 $m\geqslant 28$为偶数，$6nB_m\equiv 6(mn+1)\pmod{n^2}$，$n=2p_1p_2\cdots p_s$，$p_i-1\mid m$，$\frac{n}{p_i}\equiv m((p_i-1)!+p_i+1)-p_i-1\pmod{p_i^2}$。
关键词　等幂和　Bernoulli数　Bowen猜想
中图法分类号　O 156

Abstract　We gain congruences relation of sum of equal powers and Bernoulli's numbers, and Bowen's conjecture was discussed by using our theorems on the structure of Bernoulli's numbers, Acquired that if $S_m(n)=(n+1)^m$ and $m>1$, then $m\geqslant 28$ is an even number, $6nB_m\equiv 6(mn+1)\pmod{n^2}$, $n=2p_1p_2\cdots p_s$, p_i-1 dividing of m, $\frac{n}{p_i}\equiv m((p_i-1)!+p_i+1)-p_i-1\pmod{p_i^2}$. **Key words**　sum of equal powers, Bernoulli's numbers, Bowen's conjecture

1 等幂和与 Bowen猜想

等幂和 $S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+n^m$ 与 Bernoulli数 B_m 在数论研究中很有用，它们不仅与判别素数的充要条件[1]、G· Giuga猜想[2]有关，而且与 Bowen猜想密切相连。1900年 Bowen猜想[3]：不定方程

$$S_m(n)=(n+1)^m,\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1,\tag{1}$$

仅有正整数解 $(n,m)=(1,2)$。Moser、Tijdeman、阎发湘[3]、王云葵等人对 Bowen猜想进行了大量的研究。本文利用等幂和与 Bernoulli数的深刻性质，获得了 Bowen猜想的进一步结果。

2 等幂和与 Bernoulli数的同余关系

引理 1[2]　m为奇数，n为自然数，则 $n(n+1)\mid 2S_m(n)$。

引理 2[2]　m为偶数，n为自然数，则

$$2nB_m+mnS_{m-1}(n-1)=\sum_{r=o}^{\frac{m}{2}}C_m^{2r}B_{2r}n^{2r}\cdot S_{m-2r}(n-1).\tag{2}$$

引理 3[2]　m为偶数，$n\geqslant 2$，则 $n+nB_m$的分母。

引理 4[4]　p为奇素数，$p-1\mid m$，则

$$S_m(p-1)\equiv p-1-m((p-1)!+1)\pmod{p^2}.\tag{3}$$

引理 5[5]　m为偶数，$p=2$或 $p\geqslant 3$为奇数，$p^\tau\mid n(\tau\geqslant 1)$，则

$$S_m(n)\equiv S_m(n-1)\equiv\frac{n}{p}S_m(p-1)\pmod{p^\tau}.\tag{4}$$

引理 6　p为素数，$p\mid n$，$p^\tau\mid m(\tau\geqslant 1)$，则 $p^{\tau+1}\mid C_m^rn^{m-r}\quad(1\leqslant r\leqslant m-1)$。

证明　当 $p\nmid r$时，由 $p^\tau\mid m$及 $C_m^r=\frac{m}{r}C_{m-1}^{r-1}$知，必有 $p^\tau\mid C_m^r$，又 $p\mid n^{m-r}$，故 $p^{\tau+1}\mid C_m^rn^{m-r}$。

当 $p\mid r$时，设 $p^t\parallel r$，则由 $p^\tau\mid m$及 C_m^r为整数知，$t\leqslant\tau$，$p^t\parallel m-r$，从而 $t+1\leqslant m-r$。由 $p\mid n$有 $p^{t+1}\mid n^{m-r}(1\leqslant r\leqslant m-1)$，再由 $C_m^r=\frac{m}{r}C_{m-1}^{r-1}$有 $p^{\tau-t}\mid C_m^r$，故 $p^{\tau-t}\cdot p^{t+1}\mid C_m^rn^{m-r}$，即 $p^{\tau+1}\mid C_m^rn^{m-r}$。

综上可知，当 $1\leqslant r\leqslant m-1$时，$p^{\tau+1}\mid C_m^rn^{m-r}$。

引理 7　$m\geqslant 2$，$n\geqslant 4$均为偶数，则

$$S_m(n-2)=\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}}C_m^{2r}\left(\frac{n}{2}\right)^{m-2r}S_{2r}\left(\frac{n-4}{2}\right)+(n-$$

1999-06-22收稿。
* 第四届全国初等数学研究学术交流会学术报告和广西民族学院重点科研项目资助课题。

$3)(\frac{n}{2})^m+1.$ (4)

证明 $S_m(n-2)-1=\sum_{k=2}^{n-2}k^m=\sum_{k=2}^{n-2}(\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-k))^m=\sum_{k=2}^{n-2}\sum_{r=0}^{m}(-1)^rC_m^r(\frac{n}{2})^{m-r}(\frac{n}{2}-k)^r$

$$=\sum_{r=1}^{m}(-1)^rC_m^r(\frac{n}{2})^{m-r}\sum_{k=2}^{n-2}(\frac{n}{2}-k)^r+(n-3)(\frac{n}{2})^m$$

$$=\sum_{r=1}^{m}(1+(-1)^r)C_m^r(\frac{n}{2})^{m-r}S_r(\frac{n-4}{2})+(n-3)(\frac{n}{2})^m$$

$$=2\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}}C_m^{2r}(\frac{n}{2})^{m-2r}S_{2r}(\frac{n-4}{2})+(n-3)(\frac{n}{2})^m.$$

定理 1 p为素数,$m\geqslant 4,n\geqslant 4$均为偶数,$p|n$,$p^\alpha|m(\alpha\geqslant 1)$,则

(i)当p为奇素数时

$$S_m(n-2)\equiv 2S_m(\frac{n-4}{2})+1(\bmod p^{\alpha+1});\tag{5}$$

(ii)当$p=2$且$4|n$时

$$S_m(n-2)\equiv 2S_m(\frac{n-4}{2})+1(\bmod 2^{\alpha+2}).\tag{6}$$

证明 (i)p奇素数,$p|\frac{n}{2}$,由引理6有$p^{\alpha+1}|C_m^{2r}(\frac{n}{2})^{m-2r}(1\leqslant r\leqslant\frac{m-2}{2})$,再由引理7有

$$S_m(n-2)\equiv 2S_m(\frac{n-4}{2})+1+(n-3)(\frac{n}{2})^m\quad(\bmod p^{\alpha+1}).$$

由$p^\alpha|m$有$\alpha+1\leqslant m$,故$p^{\alpha+1}|(\frac{n}{2})^m$,故(5)式成立.

(ii)因$2|\frac{n}{2}$,由引理6和引理7则有

$$S_m(n-2)\equiv 2S_m(\frac{n-4}{2})+1+(n-3)(\frac{n}{2})^m\quad(\bmod 2^{\alpha+2}).$$

由$2^\alpha|m$知$\alpha+2\leqslant m$,故$2^{\alpha+2}|(\frac{n}{2})^m$,从而(6)式成立.

定理 2 m为偶数,$p=2$或$p\geqslant 3$为奇数,$p|n$,$(p,S_m(p-1))=1$,$\alpha\geqslant 1$,则

$S_m(p-1)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$的充要条件是$p^{\alpha+1}|n$.

证明 必要性 设$S_m(n-1)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$,对$\alpha$用数学归纳法证明:必有$p^{\alpha+1}|n$.当$\alpha=1$时,由$p|n$且$S_m(n-1)\equiv 0(\bmod p)$,由引理5有

$$S_m(n-1)\equiv\frac{n}{p}S_m(p-1)\equiv 0(\bmod p).$$

因$(p,S_m(p-1))=1$,故$p|\frac{n}{p}$,$p^2|n$,即当$\alpha=1$时结论成立.假设当$\alpha=k$时结论成立,即有$p^{k+1}|n$,则当$\alpha=k+1$时,由题设$S_m(n-1)\equiv 0(\bmod p^{k+1})$及引理5有

$$S_m(n-1)\equiv\frac{n}{p}S_m(p-1)\equiv 0(\bmod p^{k+1}).$$

由$(p,S_m(p-1))=1$有$p^{k+1}|\frac{n}{p}$,$p^{k+2}|n$,即当$\alpha=k+1$时结论成立,这就证明了必要性.

充分性 设$p^{\alpha+1}|n$,则$p^\alpha|\frac{n}{p}$,由引理5有

$$S_m(n-1)\equiv\frac{n}{p}S_m(p-1)\equiv 0(\bmod p^\alpha).$$

定理 3 $m\geqslant 4,n\geqslant 2$均为偶数,则

(i) $2S_m(n-1)\equiv 2nB_m-\frac{1}{3}n^2C_m^2S_{m-2}(n-1)$ $(\bmod n^2)$, (7)

(ii)当$3\nmid n$或$m\not\equiv 2(\bmod 3)$时

$$2S_m(n-1)\equiv 2nB_m(\bmod n^2),\tag{8}$$

(iii)当$3|n$且$m\equiv 2(\bmod 3)$时

$$2S_m(n-1)\equiv 2nB_m-\frac{1}{3}n^3B_{m-2}(\bmod n^2).\tag{9}$$

证明 $m-1$为奇数,由引理1有$n^2|mn\cdot S_{m-1}(n-1)$,由引理2得

$$2nB_m\equiv 2\sum_{r=0}^{\frac{m}{2}}C_m^{2r}B_{2r}S_{m-2r}(n-1)(\bmod n^2).\tag{10}$$

由引理3,$n\nmid nB_{2r}$的分母,故$n^2|n^{2r}B_{2r}(2\leqslant r\leqslant\frac{m}{2})$的分子,再由$B_2=\frac{1}{6}$及(10)式即得(7)式.

(ii)当$3\nmid n$时,$n^2|\frac{1}{3}n^2$的分子;当$m\not\equiv 2(\bmod 3)$时,$3|C_m^2$,$n^2|\frac{1}{3}C_m^2n^2$,故由(7)式得(8)式.

(iii)当$3|n$且$m\equiv 2(\bmod 3)$时,由(8)式有

$$2S_{m-2}(n-1)\equiv 2nB_{m-2}(\bmod n^2).\tag{11}$$

由于$C_m^2\equiv 1(\bmod 3)$,故由(7)式与(11)式即得(9)式.

定理 4 $p\geqslant 5$为素数,$p-1|m$,则

$$pB_m=p-1-m((p-1)!+1)\ (\bmod p^2).\tag{12}$$

证明 因$p\geqslant 5$为素数,由文献[2]有

$$S_m(p-1)\equiv pB_m(\bmod p^2).\tag{13}$$

由(3)与(13)即得(12)式.

3 Bowen猜想的进一步结果

最近,我们根据幂和不等式证明了[6]:若方程(1)有 $m>1$ 的正整数解,则 $m+4\leqslant n\leqslant 2m-6$,另外,我们还证明了:

引理 8[5] 若方程(1)有 $m>1$ 的正整数解,则 $m\geqslant 6$ 为偶数;$n\|B_m$ 的分母,$n|(nB_m-1)$ 的分子,$(n+1)|B_m$ 的分子;$n=2p_1p_2\cdots p_s(s\geqslant 2)$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 为相异奇素数,并且满足:

① 对每个 p_i 均有 $p_i-1|m,\frac{n}{p_i}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p_i)$,

$$\frac{n}{p_i}\equiv m(S_{p_i-1}(p_i-1)+1)-p_i-1\ (\mathrm{mod}\ p_i^2),\tag{14}$$

$$② \ \frac{1}{2}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_s}+\frac{1}{n} \text{是自然数}.\tag{15}$$

引理 9[7] 若方程(1)有 $m>1$ 的解,则 $m\geqslant 28$ 为偶数,并且满足

$$① \ (n+1)^2|(m+1)(\frac{m+2}{2})!\,B_m,\tag{16}$$

$$② \ n(n+2)(2n+1)(2n+3)|6(m+1)(\frac{m+2}{2})!.\tag{17}$$

定理 5 若方程(1)有 $m>1$ 的解,则 $m\geqslant 28$ 为偶数,$n=2p_1p_2\cdots p_s(s\geqslant 2)$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 为相异奇素数,并且满足 $p_i-1\|m,\frac{n}{p_i}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p_i)$ 及

① 对 n 的任意素因子 p 有

$$\frac{n}{p}\equiv m((p-1)!+p+1)-p-1(\mathrm{mod}\ p^2);\tag{18}$$

$$② \ 6nB_m\equiv 6(1+mn)(\mathrm{mod}\ n^2);\tag{19}$$

③ 当 $3\nmid n$ 或 $m\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时

$$2nB_m\equiv 2(1+mn)\ (\mathrm{mod}\ n^2);\tag{20}$$

④ 当 $3|n$ 且 $m\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时

$$2nB_m\equiv 2(1+mn+\frac{1}{6}n^3B_{m-2})(\mathrm{mod}\ n^2);\tag{21}$$

$$⑤ \text{当} \ 2^\tau\|m(\tau\geqslant 1)\text{时},n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 2^{\tau+3}).\tag{22}$$

证明 ① 由引理 8 引理 9 知 $m\geqslant 28$ 为偶数,$n=2p_1p_2\cdots p_s,p_i-1\|m,\frac{n}{p_i}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p_i)$,且对 n 的素因子 p 均有

$$\frac{n}{p}\equiv m(S_{p-1}(p-1)+1)-p-1(\mathrm{mod}\ p^2).\tag{23}$$

由(3)有 $S_{p-1}(p-1)\equiv(p-1)!+p\ (\mathrm{mod}\ p^2)$,代入(23)即得(18)式.

② 由于 $S_m(n-1)=S_m(n)-n^m=(n+1)^m-n^m\equiv 1+mn\ (\mathrm{mod}\ n^2)$,代入(7)~(9)即得(19)~(21).

③ 由于必有 $4|n+2$,再由 $2^\tau\|m$ 及(6)式有

$$S_m(n)\equiv 2S_m(\frac{n-2}{2})+1\ (\mathrm{mod}\ 2^{\tau+2}),\tag{24}$$

令 $y=\frac{n+2}{2}$, 则 $2|y$, 由引理 6 有 $2^{\tau+1}|C_m^{2r-1}y^{m-2r+1}$,故

$$2S_m(\frac{n-2}{2})\equiv S_m(n)-1\equiv(n+1)^m-1(\mathrm{mod}\ 2^{\tau+2})$$

$$\equiv(y+\frac{n}{2})^m-(y-\frac{n}{2})^m(\mathrm{mod}\ 2^{\tau+2})$$

$$\equiv\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}}C_m^{2r-1}y^{m-2r+1}(\frac{n}{2})^{2r-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{\tau+2}),$$

即 $S_m(\frac{n-2}{2})\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{\tau+1})$,故 $S_m(\frac{n-4}{2})\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{\tau+1})$,因为 $2|\frac{n-2}{2}$,故由定理 2 得 $2^{\tau+2}|\frac{n-2}{2}$,即 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 2^{\tau+3})$.

另外作者猜想:设 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 为相异奇素数,则 $\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_s}+\frac{1}{2p_1p_2\cdots p_s}$ 不是自然数.

参考文献

1 王云葵. 伯努利数与判别素数的充要条件. 广西民族学院学报, 1998, 4(1): 11~13.
2 邓培民, 王云葵. 关于伯努利数结构的讨论. 广西师范大学学报, 1996, 14(4): 1~5.
3 曹珍富. 数论中的问题与结果. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996. 132~134.
4 王云葵. 等幂和与 Stirling数的奇妙关系. 广西师院学报, 1998, 15(4): 23~27.
5 王云葵. 等幂和与波文猜想. 广西教育学院学报, 1998, (1): 104~111.
6 周 科, 王云葵. 幂和不等式与 Bowen猜想. 广西师院学报, 1999, 16(2): 16~20.
7 王云葵. 等幂和的分解与波文猜想. 桂林地区教育学院学报, 1998, 17(4): 53~56.

(责任编辑: 黎贞崇)