

牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理的证明

Proof of Theorem of Acceleration Composition of a Particle When Carrier Motion is in Plane Motion

刁海林

Diao Hailin

(广西大学林学院 南宁市邕武路 16号 530001)

(Forestry College, Guangxi Univ, 16 Yongwulu, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要 用矢量法给出牵连运动为平面运动时,点的加速度合成定理的证明。

关键词 矢量方法 平面运动 加速度定理 证明

中图分类号 TH 113.22

Abstract A theorem of composite of acceleration of a particle is proved by vector method when carrier is in plane motion.

Key words vector method, plane motion, theorem of acceleration, proof

牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理,是机械学中研究平面机构复杂运动的一个定理。关于它的证明,是运动学中的一个难题。目前各类有关书籍中均未给出其证明,而直接引用牵连运动为定轴转动时点的加速度合成定理的证明结论,显然欠妥。鉴此,笔者将在本文中给出该定理的严格证明,以饷读者。

1 定理的证明

设 $oxyz$ 为定参考系, $o'x'y'z'$ 为动参考系, \vec{i}' 、 \vec{j}' 、 \vec{k}' 分别为沿动参考系中相应坐标轴方向的单位矢量,见图 1 令动参考系中的 $x'o'y'$ 坐标平面相对于定参考系中的 xoy 坐标平面作平面运动,其角速度和角加速度分别为 \vec{k}_e 、 $\vec{\Sigma}$,坐标原点 o' (基点) 的速度和加速度分别为 $\vec{\xi}$ 、 $\vec{a}_e = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$ 。某瞬时,动点 M 相对于动参考系的相对位矢、相对速度及相对加速度分别为:

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (1)$$

$$\vec{\xi} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \quad (2)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' \quad (3)$$

根据定义,动点 M 的牵连速度和牵连加速度分别为动参考系上与动点 M 相重合的 M' 点(牵连点)的速度和加速度,可分别由平面运动的基点法确定:

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}' = \vec{\xi} + \vec{k}_e \times \vec{r}' \quad (4)$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}' = \vec{a}' + \vec{a}_{M'o'} + \vec{a}_{M'o'} = \vec{a}' + \vec{\Sigma} \times \vec{r}' +$$

$$\vec{k}_e \times (\vec{k}_e \times \vec{r}') \quad (5)$$

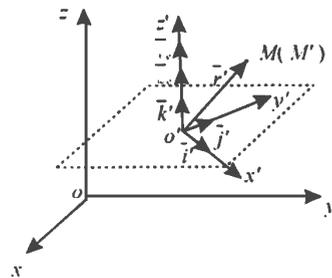
图 1 动点 M 及其合成运动坐标关系

Fig. 1 The relation chart of a particle M and its composite motion coordinates

因动点 M 的绝对速度

$$\vec{\xi}_a = \vec{\xi} + \vec{\xi}' \quad (6)$$

故动点 M 的绝对加速度为

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \frac{d\vec{\xi}_a}{dt} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \frac{d\vec{\xi}'}{dt} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \frac{d(\vec{k}_e \times \vec{r}')}{dt} + \frac{d\vec{\xi}}{dt} \\ &= \vec{a}_e + \vec{\Sigma} \times \vec{r}' + \vec{k}_e \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\xi}}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中 $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ 及 $\frac{d\vec{\xi}}{dt}$ 分别为 (1)、(2) 式对时间 t 的导数,

$$\text{即 } \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\xi} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{a}_e + \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (9)$$

引入泊桑 (Poisson) 公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{i}'}{dt} &= \vec{k}_e \times \vec{i}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= \vec{k}_e \times \vec{j}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= \vec{k}_e \times \vec{k}' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{得 } \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\xi} + \vec{k} \times \vec{r}' \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{a}_r + \vec{k} \times \vec{\xi} \quad (12)$$

将 (11)、(12) 式代入 (7) 式, 得

$$\vec{a}_a = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{k} \times (\vec{\xi} + \vec{k} \times \vec{r}') + \vec{a}_r + \vec{k} \times \vec{\xi} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}') + \vec{a}_r + 2\vec{k} \times \vec{\xi} \quad (13)$$

令 $\vec{a}_k = 2\vec{k} \times \vec{\xi}$, 并将 (5) 式代入 (13) 式, 得

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \quad (14)$$

这就是牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理。它表明当牵连运动为平面运动时, 动点在某瞬时的绝对加速度 \vec{a}_a 等于该瞬时它的牵连加速度 \vec{a}_e 相对加速度 \vec{a}_r 和科氏加速度 \vec{a}_k 三项的矢量和。

2 结语

从牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理

(上接第 27 页 Continue from page 27)

5 地形要素与专题要素的表示

影像地图上需要表示的地理要素没有明确规定, 主要根据应用目的和比例尺大小而决定取舍。根据水电行业特点和市水电局的要求, 我们选择了以下地理要素作为影像地图表示的附加信息:

- (1) 无形标志: 如行政区划界线、自然保护区界线、规划水库等;
- (2) 影像图上显示不清楚或没有显示的专题信息 (用线段、符号表示): 如铁路、公路、小型水库等;
- (3) 地形标志点: 如三角点、镇以上政府驻地、人文标志点等符号;
- (4) 主要地名 (市、县、乡镇、部分村、山脉、河流、公路、铁路、机场等) 注记;
- (5) 水利工程: 包括各大中型水库、主要小(一)型水库、渠道、水量站、雨量站等其它水利工程的说明、图片等;
- (6) 其它: 包括主要风景旅游点、历史文化点等。

以上要素主要从桂林市电子沙盘所建立的 1:10 万数字地形图矢量库中获取。其中的一些专题要素资料较老, 目前已发生了较大变化 (如位置变化, 大小、形状变化, 性质更换等), 如新增的机场路、桂—柳高速公路, 改造的桂—黄一级公路、桂—阳二级公路等。这些信息及铁路等均直接采用遥感资料 (包括 1998 年 10 月的 TM 资料和 1999 年的 Spot 资

料的证明结果 (14) 式来看, 其形式虽与牵连运动为定轴转动时点的加速度合成定理相同, 但内容和意义是不同的。譬如, 对于牵连加速度 \vec{a}_e , 前者是牵连点 M' 随动参考系作平面运动时的加速度, 后者则为牵连点 M' 随动参考系作定轴转动时的加速度, 虽然各自都包含有转动的成分, 但彼此相对转动的坐标轴不同, 前者绕动坐标轴转动, 后者则绕定坐标轴转动。所以两定理在内容上是不相一致的, 不能相提并论, 应用时必须加以区分。

参考文献

- 1 据贻宏等. 用复向量法研究平面机构的运动. 力学与实践. 1999, 21 (3): 31~34.
- 2 哈尔滨工业大学理论力学教研室编. 理论力学. 上册. 北京: 高等教育出版社. 1981. 343~345.

(责任编辑: 蒋汉明)

料) 解译的方法进行了信息更新, 使其保持了地图的现势性。照片通过扫描处理嵌入影像图中。比例尺采用线型比例尺, 并制作了相应的图例 (图 1)。

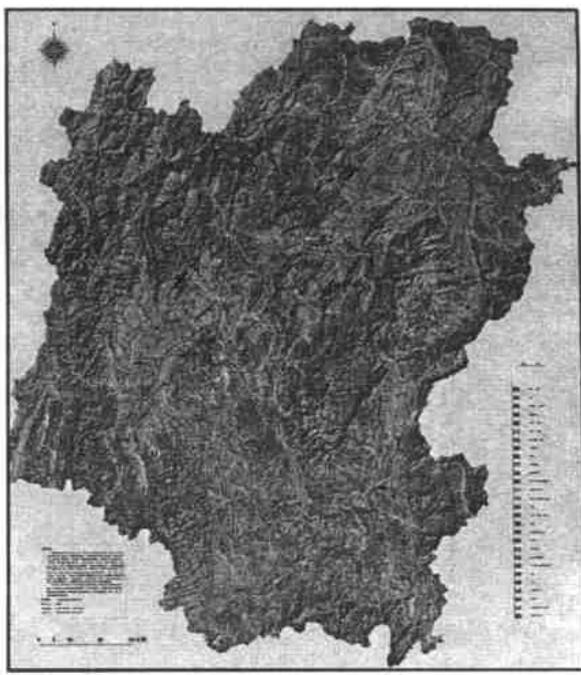


图 1 桂林市卫星影像

Fig. 1 Satellite mosaic image of Guilin

由于所选择的地形图要素以矢量方式表示, 其地形图 (底图图像) 已与遥感图像进行过严格的几何配准, 保证影像所显示的位置与地理要素的几何位置严格吻合, 而且输出时字体大小、形态可根据要求随时变换, 并不会因成图比例尺变化而出现变形和位移。

(责任编辑: 黎贞崇)