

桁架拓扑和尺寸优化的协同演化算法*

A Co-evolution Algorithm for the Topology and Size Optimization of Trusses

刘光惠 韦日钰

Liu Guanghui Wei Riyu

(广西大学工业实验中心 CAE所 南宁市西乡塘东路 10号 530004)

(CAE Research Institute, Guangxi Univ., 10 East Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 针对桁架拓扑优化问题提出桁架拓扑和尺寸优化的协同演化算法。先给出桁架拓扑和尺寸优化的数学模型,再对协同演化的机理进行说明,给出算法在桁架问题上实现的编码策略、适应值函数构造等方法。最后,对一个十杆桁架进行拓扑和尺寸协同演化计算,给出计算结果。

关键词 遗传算法 协同演化 优化 桁架

中图分类号 TP 301.6

Abstract A co-evolution algorithm used to solve topology and size optimization of trusses is proposed. The mathematical models of topology and size optimization of trusses are given firstly, and then a co-evolution mechanism for optimization of both models, including coding strategies and the construction of fitness functions, is described. To demonstrate the performance of the algorithm, an example of ten-bar truss optimization with discrete cross-section areas is presented.

Key words genetic algorithm, co-evolution, optimization, truss

桁架拓扑优化是结构优化领域中一个具有挑战性的课题。与桁架尺寸优化相比,它不仅要求出杆件的截面尺寸,而且还要确定节点间的杆件连接方式。文献[1]指出:“严格地说,应该用逻辑性的变量(存在或不存在)或整数变量来表示节点之间是否有杆件相连”,然而求解整数规划的问题又增加了问题的难度。为了避开整数规划问题,现有的桁架拓扑优化方法多是在尺寸优化模型中引入杆件删除策略进行求解^[2,3],从而将拓扑优化问题转化为尺寸优化问题,但这又会引起解的奇异现象或杆件“删不掉”的问题。而当桁架的尺寸设计变量的取值是离散的时候,用基于导数的方法又无能为力。针对这些问题,本文用遗传算法来求解桁架的拓扑优化问题,该法正是以求解离散变量的组合优化问题见长,而且本文也正是用逻辑性变量来表示杆件之间的连接关系,还拓扑优化问题的本来面目。考虑到桁架拓扑优化问题的特点,即拓扑关系要受到尺寸变化的影响,本文引入了拓扑和尺寸协同演化的思想,使得桁架拓扑和尺寸

的演化能够既互相独立又协同进行。

1 桁架拓扑、尺寸优化的数学模型

1.1 桁架尺寸优化的数学模型

桁架的尺寸优化是在给定的拓扑结构下,求得满足约束条件并使得目标值达到最优的结构设计变量取值。对以重量最轻为目标,以应力和位移为约束条件,以离散的杆件截面积为设计变量的桁架尺寸优化问题,其优化数学模型给出如下:

$$\begin{aligned}
 & \text{求 } A \\
 & \min W = \sum_{i=1}^M d_{A_i} \sum_{l \in G_i} l_i, \\
 & \text{s. t. } \underline{\sigma}_i \leq \sigma_j \leq \bar{\sigma}_i, \\
 & \underline{W} \leq W \leq \bar{W}, \\
 & A_i \in \{S_1, S_2, \dots, S_{NS}\}, \\
 & i = 1, 2, \dots, M; j \in G; l = 1, 2, \dots, NL, \\
 & k = 1, 2, \dots, NN,
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $A = [A_1, A_2, \dots, A_M]^T$ 是变量连接后的截面设计变量向量, M 是杆件组数, A_i 是第 i 组杆件的横截面面积。 A_i 为离散集 $\{S_1, S_2, \dots, S_{NS}\}$ 中的一个元素, NS 是集合中元素的个数,且假设 $S_1 < S_2 < \dots < S_{NS}$; d 是第 i 组杆件的容重; G 是属于第 i 组杆件的杆

2000-01-24收稿。

* 国家自然科学基金(59868001)、广西自然科学基金(桂科配9912009)、广西区高校跨世纪人才基金资助项目。

件编号集合; l_j 是第 j 号杆的长度; e_{jl} 是第 j 号杆在第 l 个工况下的应力; \bar{W}_k 是第 l 个工况下的第 k 个受约束的位移值; $\bar{e}_i, e_i, \bar{W}_k, W_k$ 分别是应力和位移约束的上、下限; NL 是工况数; NN 是位移约束数

1.2 桁架拓扑优化的数学模型

桁架的拓扑优化是在给定的节点集合与支承和外载下, 求得使目标达到最优的节点最优连接关系。以重量最轻为目标的桁架拓扑优化数学模型如下:

求 Z

$$\min W = \sum_{i=1}^M d_i A_i \sum_{j \in G_i} Z_{ij}$$

s. t. $\text{StrucFlag} = 1;$
 $A_i \in \{S_1, S_2, \dots, S_{v_s}\}; Z_{ij} \in \{0, 1\};$
 $i = 1, 2, \dots, M; j \in G_i.$ (2)

其中, $Z = [Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1j}, \dots, Z_{ij}, \dots, Z_{Mj}, \dots]^T$ 是杆件的拓扑设计向量, Z_{ij} 是拓扑结构中第 i 组杆件编号为 j 的杆是否存在的变量 (逻辑变量 0 或 1), $Z_{ij} = 1$ 时表示该杆件存在于结构中, $Z_{ij} = 0$ 时表示该杆件不存在。在拓扑优化中, 要求所产生的桁架应是稳定的结构, 而不能是可动的机构。即, 拓扑模型中只考虑桁架的机动性约束, 用一个标识变量 StrucFlag 来表示, $\text{StrucFlag} = 1$ 表明该拓扑结构是稳定的, $\text{StrucFlag} = 0$ 表明该拓扑结构是可动的机构。机动性约束的处理见下一节。其他符号含义同式 (1)。

2 协同演化算法及实现机理

协同演化是近几年来提出的新方法, 它是在将遗传算法用于求解不同类型而又互相联系的优化设计问题时提出的, 其基本思想是不同类型问题在各自设计空间相对独立的演化进程中, 互相影响、协同地进行。下面首先给出一个协同演化的模型

2.1 协同演化模型

Maher 和 Poon 等^[4] 在 1996 年提出“问题-设计”协同演化模型, 见图 1

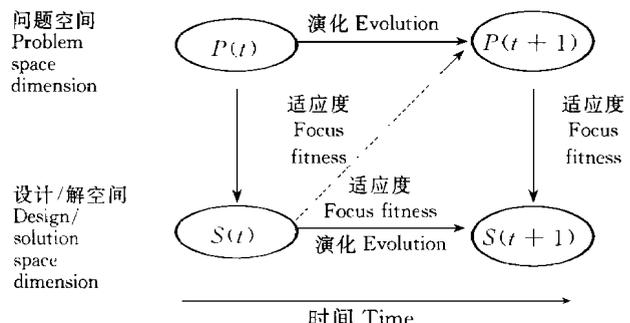


图 1 问题-设计探索模型

Fig. 1 Problem-design exploration model

图 1 中, 问题空间以 P 表示, 设计空间 (或称解空间)

以 S 表示。该图阐明了协同演化探索过程就是问题和解 (设计) 之间随时间推移的相互作用过程, 概括起来有如下几个特点:

- (i) 整个探索过程有两个不同的探索空间: 问题空间与设计空间;
- (ii) 在探索过程中, 两个状态空间相互作用;
- (iii) 沿水平方向的移动是演化过程
 - a. 问题空间的演化, 从 $P(t)$ 演化到 $P(t+1), P(t+2)$, 如此进行下去;
 - b. 解 / 设计空间的演化, 从 $S(t)$ 演化到 $S(t+1), S(t+2)$, 如此进行下去;
 这里, $t, t+1, t+2$ 表示演化代数。
- (iv) 沿斜线方向的移动是目标驱动求解的过程, 即“问题到设计求解” (斜向下的箭头方向) 和“设计调整问题定义” (斜向上的箭头方向)。

$P(t)$ 是问题空间第 t 代的设计目标, $S(t)$ 是当前探索的解空间。 $S(t)$ 不仅给出了解的探索空间, 同时它也影响着问题空间的演化, 使得问题空间从 $P(t)$ 探索到 $P(t+1)$ 。图 1 中从 $S(t)$ 到 $P(t+1)$ 的斜向上的虚线箭头就是 $S(t)$ 的影响线, 该斜向上的箭头是一个反向操作过程, 使得 $S(t)$ 成为目标的一个“探索”过程在问题空间展开, $P(t+1)$ 就是探索得到的“解”。于是问题空间和设计空间的相互作用如此往复下去, 直到求得满意的解。

该探索模型描述了如下一个演化机制, 演化的两个空间是问题空间和设计空间, 各个空间的演化都是在另一个空间的最新一代的指导下进行的, 因而称为协同演化模型。

2.2 桁架拓扑和尺寸优化的协同演化算法与实现

本文采用遗传算法分别求解桁架的拓扑和尺寸优化问题。由桁架拓扑和尺寸优化的数学模型 (1) (2) 可见, 桁架的尺寸优化是在给定的拓扑结构下进行的, 而拓扑优化模型中的优化目标又随尺寸 (截面) 设计变量值的变化而变化。因此, 一方面, 不同的拓扑结构决定了不同的尺寸优化结果, 另一方面, 尺寸优化结果又反过来影响拓扑优化过程。桁架的拓扑和尺寸遗传优化是既相对独立又相互影响的协同演化过程。对应于协同演化模型来看, 桁架的拓扑演化可以看作是问题空间的探索过程, 而桁架拓扑优化的结果要反映到桁架结构尺寸取值上来, 因此, 可以把桁架的尺寸演化看作是设计空间或解空间的探索过程。整个协同演化过程为: 在第 t 代确定的桁架拓扑优化空间 $P(t)$ 下, 进行桁架尺寸的优化, 得到第 t 代的尺寸优化解空间 $S(t)$, $S(t)$ 又作为拓扑演化的适应性衡量标准, 使得拓扑优化空间由 $P(t)$ 演化到

第 $t+1$ 代的桁架拓扑优化空间 $P(t+1)$ 。在新的拓扑优化空间 $P(t+1)$ 下,尺寸优化的设计空间由 $S(t)$ 演化到 $S(t+1)$,如此协同演化下去,直到得到满意的拓扑优化解及相应的尺寸取值。

协同演化算法如下:

```

t= 0;
{初始化拓扑群体 P(t) 各个体 P(t)i 的基因码串;}
循环: {对拓扑群体 P(t) 的各个体 P(t)i 进行机动性检查;}
if( P(t)i 的 StrucFlag= 1)
{
    对给定的 P(t)i 随机生成尺寸优化群体 S(t);
    在 S(t) 的基础上进行尺寸演化 m代;
    if(尺寸优化有可行解 )
    {
        将尺寸演化结果传给 P(t)i;
        并据此求得 P(t)i 的适应值;
    }
    else
    {
        赋一个预定的很小的适应值给 P(t)i;
    }
}
统计本次拓扑演化群体中稳定个体的适应值,
找出可行的最好结果;
{
    在群体 P(t) 的稳定个体中选择并生成 t+1 代的拓扑群体 P(t+1);
    对 P(t+1) 进行遗传操作;
    goto 循环,直到循环到预先规定的代数;
}

```

2.2.1 设计变量的表示

如前所述,桁架拓扑设计变量是用杆件是否存在的逻辑变量来表示的,自然地,我们用二进制编码来表示拓扑设计变量。桁架拓扑优化个体的编码表示见图 2,如第 i 位的取值为 1,则表示桁架结构中编码为 i 的杆件存在于结构中,如取值为 0,则表示桁架结构中编码为 i 的杆件不存在

桁架尺寸优化数学模型 (1) 中,截面积变量的取值是离散的,故在演化过程中先采用整数编码来表示截面积设计变量在离散集合中的取值号,再把该整数编码映射到实际的面积取值。于是桁架尺寸的遗传优化是在设计变量整数编码空间中进行的,在计算个体的适应性或演化完成时,再将设计变量编码还原成实际的截面面积取值。桁架尺寸优化个体的编码见图 3,如第 i 位的取值是 j ,就表明桁架结构中第 i 根杆件

的截面面积取截面变量离散集中第 j 个离散值。

2.2.2 约束处理

桁架的尺寸优化模型中的约束包括两项:位移约束和应力约束。对于不满足约束条件的个体将其约束违反值以罚函数的形式加到个体的适应值度量中(参见式 (3))。桁架拓扑优化只考虑拓扑结构的机动性约束。对于不满足机动性约束的拓扑结构采取去掉的方式处理,而满足机动性约束的拓扑结构的可行性标志则需要通过尺寸优化传递过来。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

图 2 拓扑优化个体编码

Fig. 2 Topology individual code

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 9 | 3 | 8 | 9 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

图 3 尺寸优化个体编码

Fig. 3 Size individual code

2.2.3 适应值函数的选取

基于前面提出的协同演化模型,整个探索过程中有两条演化路线,一条是桁架拓扑优化的演化,另一条则是桁架尺寸优化的演化。桁架尺寸优化是在给定的拓扑结构下进行优化的,故尺寸优化的目标函数就是在该拓扑结构下的结构重量。由于结构要满足应力与位移约束,故采用罚函数法来确定个体的适应值,如式 (3),

$$F(x) = \frac{C1}{W \times (1 + \frac{e1}{e1+W} + \frac{e2}{e2+W})}, \quad (3)$$

其中, W 是目标值(重量), $e1$ $e2$ 分别是位移、应力约束各违反分量值的平方和 $C1$ 是用于调整适应值大小的常数因子。

桁架拓扑优化也取桁架的重量为目标函数,这样便于比较拓扑结构选取的好坏。桁架拓扑优化的目标值不是通过直接计算得到的,而是利用协同的机制,它的目标值受上一代尺寸演化结果的影响,本文直接将上一代相应拓扑结构下的尺寸演化最好目标值传给拓扑结构作为目标值。拓扑演化的适应值函数计算见式 (4),

$$F(x) = \frac{C2}{W} \times s + (1-s) \times C3, \quad (4)$$

其中, W 是拓扑结构的目标值, $C2$ 是拓扑优化适应值调整因子, s 是拓扑结构的可行性标志。 $C2$ 的作用是保证可行的拓扑结构适应值要比不可行的拓扑结构适应值大。因为对于特定的拓扑结构可能会出现不可行的尺寸取值,故拓扑结构可行时 $s = 1$, 拓扑结构不可行时 $s = 0$ 。 拓扑结构不可行时,统一给定一个很小的适应值 $C3$

3 算例及结果分析

依据前述的桁架拓扑和尺寸优化协同演化算法,下面以十杆桁架为例,求解在应力和位移约束条件下,使得桁架结构重量最轻的拓扑优化问题。十杆桁架结构及其受力示意图如图 4 所示,各杆件的 $E = 2.2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho = 7850.0 \text{ kg/m}^3$, $\bar{\sigma}_t = 3.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $\bar{\sigma}_c = -3.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $P_1 = P_2 = 5.0 \times 10^5 \text{ N}$ 。离散截面集合 $S = \{0.002, 0.005, 0.008, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03, 0.035, 0.04, 0.05, 0.06\}$, 共 12 个离散值。需要指出的是,前面给出的模型是指多工况的情况,为了简化计算,本文只就单工况的情况进行计算。如要计算多工况,只需增加其他工况的杆件应力约束,别的不需作改动。本算例对作用力和位移约束不同组合的三个方案分别进行计算。计算结果见表 1 和表 2,其中的最优结构图号参见图 5。

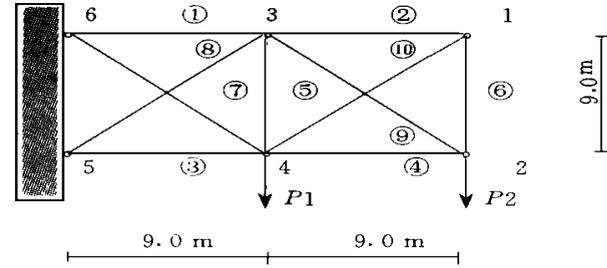


图 4 桁架示意图
Fig. 4 Ten-bar truss

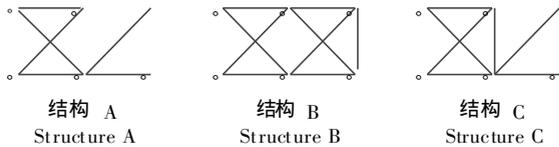


图 5 最优拓扑结构图

Fig. 5 Topology Optimum Structure

在算例中,考虑到桁架尺寸演化收敛速度较慢,于是采取尺寸演化每演化 5 代才与拓扑演化的一代交换一次信息。拓扑和尺寸演化的群体大小均取为 10。拓扑演化的杂交概率为 0.7,变异概率为 0.05,尺寸演化的杂交概率为 0.85,变异概率为 0.05。表 1 中的初始目标值是指初始随机生成的可行点中最好的目标值。从表 1 的计算结果可以看出,在相同的

作用力和不同的位移约束情况下所得到的最优拓扑结构不同,位移约束严格的方案所得到的最优拓扑结构的重量大;在相同的位移约束和不同的作用力情况下所得到的最优拓扑结构也不同。另外,对方案 3 演化了 1 000 代,最好结果仍然是 24 446 kg,说明演化 100 代是足够了。

表 1 拓扑优化结果

Table 1 Results of topology optimization

| 方案 Case | 作用力 Load | 位移约束 Displacement limit(m) | 最优结构号 Optimum structure | 目标值 Objective value(kg) | 初始目标值 Initial objective value(kg) |
|------------|-------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---|
| 1 | P_1, P_2 | 0.03 | A | 4064 | 7940 |
| 2 | P_1, P_2 | 0.004 | B | 34319 | 42469 |
| 3 | P_2 | 0.004 | C | 24446 | 33527 |

表 2 拓扑最优解的尺寸取值

Table 2 Size data of topology optimum

| 方案 Case | A1 (m ²) | A2 (m ²) | A3 (m ²) | A4 (m ²) | A5 (m ²) | A6 (m ²) | A7 (m ²) | A8 (m ²) | A9 (m ²) | A10 (m ²) |
|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1 | 0.01 | | 0.01 | 0.005 | | | 0.005 | 0.008 | 0.01 | |
| 2 | 0.06 | 0.015 | 0.06 | 0.06 | | 0.015 | 0.05 | 0.06 | 0.06 | 0.025 |
| 3 | 0.06 | | 0.05 | 0.05 | 0.005 | | 0.008 | 0.06 | 0.06 | |

4 讨论

十杆桁架协同演化结果表明,所提出的桁架拓扑和尺寸协同演化算法是可行的,取得了较为满意的结果。该算法不仅适用于桁架优化问题,也适用于其他类似的工程优化问题。下一步的工作将是把该算法用于求解城市深基坑支护工程开挖与支护方案的协同演化问题。

参考文献

- 1 孙焕纯,柴山,王跃方. 离散变量结构优化设计. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- 2 程耿东,郭旭. 考虑局部稳定性约束的桁架拓扑优化设计. 大连: 大连理工大学学报, 1995, 35(6): 770~774.
- 3 王跃方,孙焕纯. 多工况多约束下离散变量桁架结构的拓扑优化设计. 力学学报, 1995, 27(3): 365~369.
- 4 Maher M L, Poon J. Modeling design exploration as co-evolution. Microcomputers in Civil Engineering (Special Issues on Evolutionary Systems in Design), 1996.

(责任编辑: 蒋汉明)