DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.02.009
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (2): 108~110

负相关随机序列的收敛性质*

Convergence for Negatively Associated Sequences

吴群英
Wu Qunying
(桂林工学院基础部 桂林市建干路12号 541004)
(Dept. of Basis Sciences, Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 讨论同分布负相关随机(NA)序列的完全收敛性，所得结果改进和加强了 Katz和 Baum在文献[1]的著名结果.

关键词 负相关随机序列 完全收敛性 矩条件
中图法分类号 O 174

Abstract The complete convergence of random sequence for identically distributed negatively associated (IDNA) is discussed. The result in reference [1] for iid random sequence is improved.

Key words negatively associated sequence, complete convergence, moment condition

许宝禄和 Robbins于1947年引入完全收敛性概念以来，在 iid情形已解决得相当完美，例如 Baum和 Katz[1]，白志东和苏淳[2]等，最经典的结果当首推 Baum和 Katz[1] (1965年)的著名定理:

定理 **A** 设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ iid, $\alpha>\frac{1}{2}$, $\alpha p>1$, 且当 $\alpha\leqslant 1$时，进一步假设 $EX_1=0$, 则下叙述等价:

$$E|X_1|^p<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant \varepsilon n^{\alpha}\right)<\infty,\ \forall \varepsilon>0.$$

Joag-Dev 和 Proschan[3] 在 1983年提出 NA (Negatively Associated) 随机变量的概念，它在可靠性理论、多元统计分析及渗透理论等方面有广泛的应用，引起了许多学者的研究，特别是我国的苏淳、王岳宝等人在这方面作了许多研究，获得了一系列的成果，其中关于完全收敛性的有文献[4, 5]，但文献[4, 5]的结果都不够广泛，没有达到文献[1]定理 A的结果；本文所获结果完善了文献[4, 5]的相应结果，达到并加强了文献[1]定理 A的结果.

1 定义及引理

为行文方便，本文一律以 C 记与 n 无关的正常数，不同之处可取不同的值，符号“$<<$”表示通常的大“O”.

定义 随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 称为 NA的，如果对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何两个非空不交子集 A_1、A_2 均有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i: i\in A_1), f_2(X_j: j\in A_2))\leqslant 0,$$

其中 $f_i, i=1,2$ 是使上式有意义且对各变元不降的函数，

随机变量列 $\{X_n\}$ 称为 NA的，如果对任 $n\geqslant 2$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 NA的.

引理 **1**[6] 设 $\{X_j: j\in N\}$ 为零均值的 NA序列，对某个 $p\geqslant 2$，有

$$\mu_p\triangleq \operatorname*{Sup}_j E|X_j|^p<\infty,\ 记\ S_{a,k}\triangleq\sum_{j=1}^{k-1}X_{a+j},\ S_{1,k}\triangleq S_k,\ \mu_2\triangleq\operatorname*{Sup}_j EX_j^2,$$

则存在仅与 p 有关的常数 $K_p\geqslant 1$，使得对任何自然数 a 与 n，有

$$E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_{a,k}|^p\right)\leqslant K_p\left(n\mu_p+(n\mu_2)^{\frac{p}{2}}\right).$$

关于慢变化函数，众所周知有性质: 如果 $l(x)>0$ 为 $x\to+\infty$ 的慢变化函数，则

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{l(tx)}{l(x)}=1,\ \forall t>0,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{l(x+u)}{l(x)}=1,\ \forall u\geqslant 0;$

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname*{Sup}\limits_{2^k\leqslant x<2^{k+1}}\frac{l(x)}{l(2^k)}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\delta}l(x)=\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\delta}l(x)=0,\ \forall\delta>0.$

引理 **2**[2] 如 $l(x)>0$ 为 $x\to+\infty$ 时的慢变化

1999-09-20收稿.
* 广西自然科学基金资助项目，编号: 桂科青 9912008

函数,则任意 $r>0$, $\lambda>0$. 任何自然数 k,有

$$C\cdot 2^{kr}l(\lambda\cdot 2^{k})\leqslant\sum_{j=1}^{k}2^{jr}l(2^{j}\cdot\lambda)\leqslant C2^{kr}l(\lambda\cdot 2^{k}).$$

2 结果

定理 设 $\{X_n\}$ 为同分布 NA 序列, $EX_1=0$, $\alpha p>1$, $p<2$, $l(x)>0$ 为当 $x\to+\infty$ 的单调不减慢变化函数,则下两式等价

$$E\left(|X_1|^{p}l(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}})\right)<\infty,\tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha}),\ \forall\varepsilon>0.\tag{2}$$

证明 先证 (1) 蕴涵 (2)

取 q,使 $(1+\frac{1}{\alpha p})/2<q<1$,对 X_i, $i=1,2,\cdots,n$ 截尾,记

$Y_i(n)=-n^{\alpha q}I(X_i<-n^{\alpha q})+X_iI(|X_i|<n^{\alpha q})+n^{\alpha q}I(X_i>n^{\alpha q})$,

$\tilde{S}_j\triangleq\sum_{i=1}^{j}Y_i(n)$, $j=1,2,\cdots,n$.

则 $Y_1(n),Y_2(n),\cdots,Y_n(n)$,仍为 NA 的.

不难证明:

$$(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})\subset\bigcup_{i=1}^{n}(|X_i|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}n^{\alpha})\cup\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n}((X_i>n^{\alpha q},X_j>n^{\alpha q})\cup(X_i<-n^{\alpha q},X_j<-n^{\alpha q}))\cup\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{S}_j|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}n^{\alpha}\right)\triangleq A_n\cup B_n\cup C_n.\tag{3}$$

故要证 (2) 式只需证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(A_n)<\infty,\tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(B_n)<\infty,\tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(C_n)<\infty.\tag{6}$$

由慢变化函数的性质及引理 2得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1}l(n)P(|X_1|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{2^{j}\leqslant n<2^{j+1}}n^{\alpha p-1}l(n)P(|X_1|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{\alpha pj}l(2^{j})P(|X_1|\geqslant\varepsilon 2^{\alpha j})=\sum_{j=1}^{\infty}2^{\alpha pj}l(2^{j})\sum_{k=j}^{\infty}P(\varepsilon 2^{\alpha k}\leqslant|X_1|<\varepsilon 2^{\alpha(k+1)})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}2^{\alpha pj}l(2^{j})P(\varepsilon 2^{\alpha k}\leqslant|X_1|$$

$$<\varepsilon 2^{\alpha(k+1)})=\sum_{k=1}^{\infty}2^{\alpha pk}l(2^{k})P(\varepsilon 2^{k}<|X_1|^{\frac{1}{\alpha}}<\varepsilon 2^{k+1})$$

$$<<E\left(|X_1|^{\alpha p}l(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}})\right)<\infty,$$

故 (4) 式成立.

由慢变化函数的性质, NA 性, 及 q 的定义可知 $(1-2q)\alpha p<-1$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(B_n)<<\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p}l(n)P^{2}(|X_1|>n^{\alpha q})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p}l(n)n^{-2\alpha pq}l^{-2}(n^{q})\left(E(|X_1|^{p}l(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}}))\right)^{2}$$

$$<<\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-2q)\alpha p}l(n)l^{-2}(n^{q})<\infty,$$

故 (5) 式成立.

为证 (6) 式,先证

$$n^{-\alpha}\max_{1\leqslant j\leqslant n}E|\tilde{S}_j|\to 0,\tag{7}$$

由 $EX_1=0$, q 的定义知 $\alpha pq>1$, $1-q>0$

故 $n^{-\alpha}\max_{1\leqslant j\leqslant n}E|\tilde{S}_j|\leqslant n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}|EY_i(n)|=n^{1-\alpha}|E(X_1-Y_1(n))|<<n^{1-\alpha}n^{\alpha q}P(|X_1|>n^{\alpha q})\leqslant n^{1-\alpha+\alpha q}n^{-\alpha pq}\left(E(|X_1|^{p}l(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}})\right)\frac{1}{l(n^{q})}<<n^{-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)}\frac{1}{l(n^{q})}\to 0$,

故 (7) 式成立.

由 (7) 式知 (6) 式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{S}_j-E\tilde{S}_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty.\tag{8}$$

由引理 1,取

$$\lambda>\max\left(2,\frac{\alpha p-1}{\alpha(1-q)+\frac{1}{2}(\alpha pq-1)}\right)$$

得

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{S}_j-E\tilde{S}_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<<n^{-\alpha\lambda}E\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{S}_j-E\tilde{S}_j|^{\lambda}<<n^{-\alpha\lambda}(nE|Y_1-EY_1|^{\lambda}+(nEY_1^{2})^{\frac{\lambda}{2}})$$

$$<<n^{-\alpha\lambda+1}E|Y_1|^{p}|Y_1|^{\lambda-p}+n^{-\alpha\lambda+\frac{\lambda}{2}}(E(|X_1|^{p}|X_1|^{2-p})^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$<<n^{-\alpha\lambda+1+\alpha q\lambda-\alpha qp}+n^{-\alpha\lambda+\alpha q\frac{\lambda}{2}(2-p)},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{S}_j-E\tilde{S}_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<<\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha\lambda+1+\alpha q\lambda-\alpha pq}l(n)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha\lambda+\frac{\lambda}{2}+\alpha q\lambda-\frac{\alpha q\lambda p}{2}}l(n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\alpha(1-q)(\lambda-p)}l(n)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\lambda(\alpha(1-q)+\frac{\lambda}{2}(\alpha pq-1))}l(n).$$

由 q, λ 的取法知:

$-1-\alpha(1-q)(\lambda-p)<1$,

$\alpha p-2-\lambda\left[\alpha(1-q)+\frac{1}{2}(\alpha pq-1)\right]<-1$.

并由慢变化函数的性质知上两个级数都收敛,故(8)式成立.综合(4~ 8)式得(2)式成立.

再证(2)式蕴涵(1)式

$\because \max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \leqslant 2\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|$,

故由(2)式知有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2} l(n) P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) < \infty, \forall X > 0. \tag{9}$$

由(9)式可证: $P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) \to 0.$ (10)

反证,若不然,则 $\forall X>0, \exists W>0$,及自然数子列 n_k,使

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X 2^{T} n_k^{T}) > W.$$

不妨设 $n_{k+1} \geqslant 2n_k$ 并考虑到 $Tp>1$ 及慢变化函数的性质,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2} l(n) P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) \geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k\leqslant n\leqslant 2n_k} n^{Tp-2} l(n) P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) \geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{Tp-1} l(n_k) P(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k}|X_j| \geqslant$$

$$X 2^{T} n_k^{T}) \geqslant W \sum_{n=1}^{\infty} n_k^{Tp-1} l(n_k) = \infty,$$

与(9)式矛盾,故(10)式成立.

由(10)式可证

$$nP(|X_1| > X n^{T}) \to 0. \tag{11}$$

由 NA 性及 $e^{-x} \geqslant 1-x, x>0$ 得

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) = 1 - P(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| < X n^{T}) \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{n} P(|X_i| < X n^{T}) = 1 - (P(|X_1| < X n^{T}))^{n} = 1 - (1 - P(|X_1| \geqslant X n^{T}))^{n} \geqslant 1 - e^{-nP(|X_1| \geqslant X n^{T})},$$

故由(10)式得(11)式成立.

由(11)式及 NA 性得:当 n 充分大时有

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T}) = P(\bigcup_{j=1}^{n}(|X_j| \geqslant X n^{T})) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geqslant X n^{T}) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(|X_i| \geqslant X n^{T}, |X_j| \geqslant X n^{T}) \geqslant nP(|X_1| \geqslant X n^{T}) - n^{2} P(|X_1| \geqslant X n^{T}) = nP(|X_1| \geqslant X n^{T})(1 - nP(|X_1| \geqslant X n^{T})) \geqslant \frac{1}{2} nP(|X_1| \geqslant X n^{T}),$$

故 $nP(|X_1| \geqslant X n^{T}) << P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| \geqslant X n^{T})$,

结合(9)式得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-1} l(n) P(|X_1| \geqslant X n^{T}) < \infty, \forall X > 0. \tag{12}$$

由(12)式得

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-1} l(n) P(|X_1| \geqslant X n^{T}) \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^j\leqslant n<2^{j+1}} n^{Tp-1} l(n) P|X_1| \geqslant X n^{T}) \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{Tpj} l(2^j) P(|X_1| \geqslant X 2^{T(j+1)} \triangleq X_0 2^{Tj}) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{Tpj} l(2^j) \sum_{k=j}^{\infty} P(X_0 2^{Tk} \leqslant |X_1| \leqslant X_0 2^{T(k+1)}) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} 2^{Tpj} l(2^j) P(X_0 2^{Tk} \leqslant |X_1| \leqslant X_0 2^{T(k+1)}) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{Tpk} l(2^k) P(X_0 2^{Tk} \leqslant |X_1| < X_0 2^{T(k+1)}) >>$$

$$E|X_1|^{p} l(|X_1|^{\frac{1}{T}}),$$

故(1)式成立.定理证毕.

如 $\{X_i\}$iid,且取 $l(x) = 1$,则本文定理即为定理 A,故本文推广和加强了 Katz和 Baum著名的定理 A.

参考文献

1 Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. Trans Amer Math Soc, 1965, 120 (1): 108~123.

2 白志东,苏 淳.关于独立和的完全收敛性.中国科学(A辑),1985,(5): 399~412.

3 Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications. Ann Statist, 1983, 11: 286~295.

4 苏 淳. NA序列的一个 Hsu-Robbins型定理.科学通报,1996,41: 106~110.

5 苏 淳,秦永松. NA随机变量的两个极限定理.科学通报,1992,42: 243~246.

6 苏 淳,赵林城. NA序列的矩不等式与弱收敛.中国科学(A辑),1996,26 (12): 1091~1099.

(责任编辑: 邓大玉)