DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.02.010
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (2): 111~ 114

区间上平顶单峰自映射的迭代根*

Iterative Solutions of Level-top Unimodal Self-maps on the Interval

孙太祥　　蒋运然**
Sun Taixing　　Jiang Yunran
(广西大学数学系　南宁市西乡塘路 10号　530004)
(Dept. of Math. Guangxi University, 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　讨论区间 $I=[0,1]$上所有的平顶单峰自映射的迭代根问题.
关键词　平顶单峰自映射　迭代根　峰顶区间
中图法分类号　O 175.12
Abstract　Iterative roots of all level-top unimodal self-maps on the interval [0, 1] are discussed.
Key words　level-top unimodal self-maps, iterative root, level-top interval

设 $C^0(X)$ 表示拓扑空间 X 上的连续自映射之集,对某个 $F(x)\in C^0(X)$,若存在自然数 $n\geqslant 2$及 $f(x)\in C^0(X)$,使 $F(x)=f^n(x)$ 成立,则称 $f(x)$是 $F(x)$ 的一个 n阶迭代根.

近年来,国内外许多学者对迭代根问题进行了研究[1~4],但大多数都只限于单调连续函数,至于非单调的情形只讨论了个别的,例如文献[5,6].本文将讨论区间 $I=[0,1]$上所有的平顶单峰自映射的迭代根.

设 $F(x)\in C^0(I)$,对任 $0\leqslant r<s\leqslant 1$,记 $F(x)$在 $[r,s]$上的限制为 $F|_{[r,s]}$.若存在 $0<a<b<1$,使 $F|_{[0,a]}$严格递增(或严格递减),$F|_{[b,1]}$严格递减(或严格递增),$F|_{[a,b]}$等于常数,则称 $F(x)$是 I上的平顶单峰(或反单峰)自映射,称 $[a,b]$是 $F(x)$的峰顶区间,以下用 $J(I,[a,b])$(或 $S(I,[a,b])$)表示 $C^0(I)$中以 $[a,b]$为峰顶区间的平顶单峰(或反单峰)自映射之集.因为平顶单峰自映射可以通过一个拓扑变换 $h(x)=1-x$化为平顶反单峰自映射,故以下只讨论平顶单峰自映射的迭代根问题.并记

$$H_1\equiv H_1(I,[a,b])=\{F(x)\in J(I,[a,b]): F|_{[a,b]}>b\},$$

$$H_2\equiv H_2(I,[a,b])=\{F(x)\in J(I,[a,b]): F|_{[a,b]}\in[a,b]\},$$

$$H_3\equiv H_3(I,[a,b])=\{F(x)\in J(I,[a,b]): F|_{[a,b]}<a\}.$$

显然 $J(I,[a,b])=\bigcup_{i=1}^{3}H_i$.

1　H_1类映射的迭代根

引理 1　设 $F(x)\in J(I,[a,b])$,$f(x)$是 $F(x)$的 n阶迭代根,那么 $(f^i)|_{[0,a]}$及 $(f^i)|_{[b,1]}$是严格单调函数($1\leqslant i\leqslant n$).

此引理显然,证明从略.

引理 2　设 $F(x)\in J(I,[a,b])$,$f(x)$是 $F(x)$的 n阶迭代根,那么

1)若 $f([a,b])\cap[a,b]\neq\varnothing$,则 $f([a,b])\subset[a,b]$;

2)若 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,则 $f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$.

进一步,若 $f(x)\in H_1$,则 $f(I)\subset[b,f(b)]$;若 $f(x)\in S(I,[a,b])$且 $f|_{[a,b]}<a$,则 $f(I)\subset[f(a),a]$.

证明　1)若 $f([a,b])\cap[a,b]\neq\varnothing$,则存在 r_1,$r_2\in[a,b]$,使 $f(r_1)=r_2$.如果存在 $x\in[a,b]$使 $f(x)<a$,那么在 r_1和 x之间必存在 r_3使 $f(r_3)=a(x\neq r_3)$,由引理 1知 $F(x)=f^{n-1}(f(x))\neq f^{n-1}(a)=F(r_3)$,这与 $F(x)$的定义矛盾,从而对一切 $x\in[a,b]$,$f(x)\geqslant a$,同理可证对一切 $x\in[a,b]$有 $f(x)\leqslant b$,所以 $f([a,b])\subset[a,b]$.

2)若 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,由 $f(x)$的连续性

1999-04-07收稿.
* 广西自然科学基金项目.
** 广西南宁三中,南宁市青山路,530021(Nanning Third Middle School, Nanning, Guangxi, 530021, China).

及 $[a,b]$ 的连通性知 $f([a,b])\subset[0,a]$ 或 $f([a,b])\subset[b,1]$,不妨设 $f([a,b])\subset[0,a]$,如果存在 $x_1,x_2\in[a,b]$,$x_1\neq x_2$,使 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则由引理 1知 $F(x_1)=f^{n-1}(f(x_1))\neq f^{n-1}(f(x_2))=F(x_2)$,这与 $F(x)$ 的定义矛盾,从而 $f|_{[a,b]}$ 恒等于常数,所以 $f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$.

进一步,若 $f(x)\in H_1$.如果存在 $x\in[0,a)\cup(b,1]$ 使 $f(x)<b$,则必有区间 $[x_1,x_2]\subset[0,a)\cup(b,1]$,使 $f([x_1,x_2])\subset[a,b]$,从而 $F([x_1,x_2])$ 等于常数,与 $F(x)$ 的定义矛盾,从而 $f(I)\subset[b,f(b)]$,同理可证,当 $f(x)\in S(I,[a,b])$ 且 $f|_{[a,b]}<a$ 时,则 $f(I)\subset[f(a),a]$.

定理 1 设 $F(x)\in H_1$ 有 n 阶迭代根,那么:1) $F(I)\subset[b,1]$; 2) n 是奇数; 3) $F(b)=1>b=F(1)$ 或 $1>F(b)>F(1)>b$.

证明 设 $F(x)$ 的 n 阶迭代根是 $f(x)$,因 $F(b)>b$,由引理 2知 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,从而 $f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$.

我们断言 $f(x)\notin S(I,[a,b])$.否则,若 $f(x)\notin S(I,[a,b])$,因 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,则 $f|_{[a,b]}>b$(或 $<a$).如果 $f|_{[a,b]}>b$,由 $f([b,1])>b$ 及 $f|_{[b,1]}$ 是增函数知 $F|_{[b,1]}$ 是严格递增的,这与 $F(x)$ 的定义矛盾,如果 $f|_{[a,b]}<a$,由引理 2知对一切 $x\in I$,$f(x)<a$ 这与 $F(x)\in H_1$ 矛盾.所以 $f(x)\in J(I,[a,b])$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无不动点,所以 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,从而 $f(x)\in H_1$(否则,若 $f(a)<a$,则 $f(I)\subset[0,a)$,推出 $F(a)<a$ 与 $F(x)\in H_1$ 矛盾),再由引理 2即得结论 1),由于 $f|_{[b,1]}$ 与 $F|_{[b,1]}$ 是严格递减的,且 $f([b,1])\subset[b,1]$ 及 $f|^n_{[b,1]}=F|_{[b,1]}$,从而 n 是奇数,下面来推结论 3)

因为 $f([b,1])\subset[b,1]$.如果 $1=f(b)>f(1)=b$,则显然 $F(b)=f^n(b)=1>b=f^n(1)=F(1)$;如果 $f(b)<1$(或 $f(1)>b$),用归纳法可证 $b\leqslant f(1)<f^n(1)<f^n(b)<f(b)<1$(或 $b<f(1)<f^n(1)<f^n(b)<f(b)\leqslant 1$),即 $b<F(1)<F(b)<1$.

由定理 1知 若 $F(x)\in H_1$ 且 $F(0)<b$ 或 $F(1)<b$,则 $F(x)$ 无任何阶的迭代根.下面,我们只讨论 $F(1)\geqslant b$ 且 $F(0)\geqslant b$ 时的情形.

定理 2 设 $F(x)\in H_1$,奇数 $n\geqslant 3$,那么

1) 若 $F(1)=b<1=F(b)$ 且 $F(0)\geqslant b$,则 $F(x)$ 有 n 阶迭代根;

2) 若 $1>F(b)>F(1)>b$ 且 $F(0)>b$,则 $F(x)$ 有 n 阶迭代根;

3) 若 $F(0)=b<F(1)<F(b)<1$,则 $F(x)$ 无 n 阶迭代根.

证明 1) 若 $F(1)=b<1=F(b)$,$F|_{[b,1]}\in C^0([b,1])$ 严格递减,由文献 [5]中定理 10知,存在严格递减函数 $\bar f(x)\in C^0([b,1])$,使 $\bar f^n(x)=F|_{[b,1]}$ 且 $\bar f(b)=1>b=\bar f(1)$,令 $f(x)=F|^{-1}_{[b,1]}\circ\bar f\circ F(x)$,易证 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 阶迭代根.

2) 若 $1>F(b)>F(1)>b$ 且 $F(0)>b$,由 $F|_{[b,1]}\in C^0([b,1])$ 严格递减及文献 [5]中定理 10知,存在严格递减函数 $\bar f(x)\in C^0([b,1])$,使 $\bar f^n(x)=F|^{[b,1]}$ 且 $F(1)\leqslant\bar f(F(b))\leq\bar f(\min\{F(0),F(1)\})\leqslant F(b)$,令 $f(x)=F|^{-1}_{[b,1]}\circ\bar f\circ F(x)$,可证 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 阶迭代根.

3) 用反证法,假设 $F(x)$ 有 n 阶迭代根 $f(x)$,那么,由定理 1知 $f(x)\in J(I,[a,b])$ 且 $f([0,1])\subset[b,f(b)]$,因 $f([0,1])\subset[b,1]$ 且 $F(0)=b$,所以 $f(1)=b<1=f(b)$,从而 $F(1)=b$,这与 $F(1)>b$ 矛盾,即 $F(x)$ 无 n 阶迭代根.

2 H_2 类映射的迭代根

引理 3 设 $F(x)\in C^0([r,s])$ 是递增函数,$t\in(r,s)$ 使 $F|_{[r,t]}$ 严格递增,$F(t)=s$ 且对任 $x\in(r,s)$ 都有 $F(x)>x$,自然数 $n\geqslant 2$,那么

1) 若 $F(r)=r$,则对任 $x_0\in(r,t)$ 及任 $x_0<m<F(x_0)$,存在 $t<u<s$ 及递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$,满足 $f^n(x)=F(x)$ 且 $f^{n-1}(x_0)=m$,$f(s)=s>r=f(r)$,$f|_{[r,u]}$ 严格递增.

2) 若 $F(r)>r$,则对任 $r<m<F(r)$,存在递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$ 及 $t<u<s$,满足 $f^n(x)=F(x)$,且 $f^{n-1}(r)=m$,$f(s)=s$,$f|_{[r,u]}$ 严格递增.

证明 1) 取 $a_0=x_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}=m<a_n=F(x_0)$,当 $i>n$ 时,归纳定义 $a_i=F(a_{i-n})$;当 $i<0$ 时,归纳定义 $a_i=F^{-1}(a_{n+i})$,则数列 $\{a_i\}_{i=0}^{-\infty}$ 单调递减以 r 为极限.令 $k=\min\{j\geqslant 1,F(a_j)=s\}$,在 $[r,s]$ 上定义 $f(x)$ 如下:

(i) 当 $0\leqslant i\leqslant n-1$ 时,$f(a_i)=a_{i+1}$,当 $0\leqslant i\leqslant n-2$ 时,$f|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 是线性的,$f(r)=r$.

(ii) 当 $i<0$ 时,归纳定义 $f|_{[a_i,a_{i+1}]}=f|^{-1}_{[a_{i+1},a_{i+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i+2},a_{i+3}]}\circ\cdots\circ f|^{-1}_{[a_{i+n-1},a_{i+n}]}\circ F|_{[a_i,a_{i+1}]}$;当 $n-1\leqslant i\leqslant n+k-2$ 时,归纳定义 $f|_{[a_i,a_{i+1}]}=F|_{[a_{i-n+1},a_{i-n+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i-n+1},a_{i-n+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i-n+2},a_{i-n+3}]}\circ\cdots\circ f|^{-1}_{[a_{i-1},a_i]}$;当 $x\geqslant a_{k+n-1}$ 时,$f(x)=s$.

容易验证 $f(x)$ 满足引理要求.

2) 若 $F(r)>r$,取 $c<r$,作一个新的函数 $\bar F(x)\in C^0([c,s])$ 使 $\bar F|_{[r,s]}=F(x)$,$\bar F(c)=c$ 及 $\bar F|_{[c,r]}$ 是线性的.$F(x)$ 满足 1) 中条件,从而存在递增函数

$\bar f(x)\in C^0([c,s])$,使 $\bar f^{n-1}(r)=m$,$\bar f^n(x)=F(x)$,而 $\bar f([r,s])\subset[r,s]$,令 $f(x)=\bar f|_{[r,s]}$,则 $f(x)$ 满足引理要求.

引理 4 设 $F(x)\in C^0([r,s])$ 是个严格递增的函数且对任 $x\in(r,s)$,$F(x)>x$,自然数 $n\geqslant 2$,那么

1) 若 $F(r)>r$,则对任 $t\in(r,s)$ 及任 $t<m<F(t)$,存在严格递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$,满足 $f^n(x)=F(x)$,且 $f^{n-1}(t)=m$,$f(s)=s>r=f(r)$.

2) 若 $F(r)>r$,则对任 $r<m<F(r)$,存在严格递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$ 及 $f^{n-1}(r)=m<f(s)=s$.

证明 1) 取 $a_0=t<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}=m<a_n=F(t)$,当 $i>n$ 时,归纳定义 $a_i=F(a_{i-n})$;当 $i<0$ 时,归纳定义 $a_i=F^{-1}(a_{n+i})$,则数列 $\{a_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 单调递增以 s 为极限.数列 $\{a_i\}_{i=0}^{-\infty}$ 单调递减以 r 为极限.在 $[r,s]$ 上定义 $f(x)$ 如下:

(i) 当 $0\leqslant i\leqslant n-1$ 时,$f(a_i)=a_{i+1}$;当 $0\leqslant i\leqslant n-2$ 时,$f|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 是线性的;$f(s)=s>f(r)=r$.

(ii) 当 $n-1\leqslant i$ 时,归纳定义 $f|_{[a_i,a_{i+1}]}=F|_{[a_{i-n+1},a_{i-n+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i-n+1},a_{i-n+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i-n+2},a_{i-n+3}]}\circ\cdots\circ f|^{-1}_{[a_{i-1},a_i]}$.当 $i<0$ 时,归纳定义 $f|_{[a_i,a_{i+1}]}=f|^{-1}_{[a_{i+1},a_{i+2}]}\circ f|^{-1}_{[a_{i+2},a_{i+3}]}\circ\cdots\circ f|^{-1}_{[a_{i+n-1},a_{i+n}]}\circ F|_{[a_i,a_{i+1}]}$;容易验证 $f(x)$ 满足引理要求.

2) 的证明与引理 3 的 2) 类似,故从略.

由引理 4 中的 $F(x)$ 及 $f(x)$ 经过一个反向拓扑变换 $h(x)=1-x$,不难得到:

引理 5 设 $F(x)\in C^0([r,s])$ 是个严格递增的函数且对任 $x\in(r,s)$,$F(x)<x$,自然数 $n\geqslant 2$,那么

1) 若 $F(s)=s$,则存在严格递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$,满足 $f^n(x)=F(x)$,且 $f(s)=s>r=f(r)$.

2) 若 $F(s)<s$,则对任 $s<m<F(s)$,存在严格递增函数 $f(x)\in C^0([r,s])$ 使 $f^n(x)=F(x)$ 且 $f(r)=r<m=f^{n-1}(s)$.

定理 3 设 $F(x)\in H_2$,p 是 $F|_{[a,b]}$ 的不动点,则

1) 若 $F(0)=0$(或 $F(0)F(1)>0$) 且 $p\neq b$,则对一切自然数 $n\geqslant 2$,$F(x)$ 有 n 阶迭代根.

2) 若 $F(0)=0$(或 $F(0)F(1)>0$) 且 $p=b$,则对一切自然数 $n\geqslant 2$,$F(x)$ 无 n 阶迭代根.

3) 若 $F(0)>0=F(1)$,则对一切自然数 $n\geqslant 2$,$F(x)$ 无 n 阶迭代根.

证明 1) 设 $A=\{x:F(x)=x,x\in[a,p]\}$,则 $B=(a,p)-A$ 是可数个两两不交的开集之并,$F(x)$ 在 B 的每一个构成区间的闭包上的限制形如引理 3 ~ 5 中所述的函数,从而得出 $F(x)$ 在每个构成区间的闭包上的限制的 n 阶迭代根,在 $\underline{A}$ 上取恒等映射,把它们拼凑成 $F|_{[0,p]}$ 的 n 阶迭代根 $\bar f(x)$,使 $\bar f(x)$ 满足:(i) 若 $F(0)=0$,则 $\bar f(0)=0$;(ii) 若 $F(0)>0$,则 $\bar f^{n-1}(0)<\min\{F(0),F(1)\}$.

(i) 若 $a=p$,则 $\bar f(x)$ 严格递增,令

$$f(x)=\begin{cases}\bar f(x), & x\in[0,p],\\ (\bar f^{n-1})^{-1}\circ F(x), & x\in[p,1].\end{cases}$$

则 $f(x)$ 满足 1) 的要求.

(ii) 若 $a<p<b$,取 $s=\min\{x:\bar f^{n-1}(x)=p\}$,令

$$f(x)=\begin{cases}\bar f(x), & x\in[0,p],\\ \dfrac{s-p}{b-p}(x-p)+p, & x\in[p,b],\\ (\bar f^{n-1})^{-1}\circ F(x), & x\in[b,1].\end{cases}$$

则 $f(x)$ 满足 1) 的要求.

2) 若 $F(0)=0$(或 $F(0)F(1)>0$ 且 $p=b$,设 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 阶迭代根,由引理 2 知 $f([a,b])\subset[a,b]$ 或 $f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$.如果 $f([a,b])\subset[a,b]$,那么,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一不动点是 p,当 $x\in[a,p]$ 时,$f(x)>x$,而 $f|_{[b,1]}$ 严格单调,则 $f|_{[b,1]}$ 严格递减 (否则,$f|_{[b,1]}$ 严格递增将会推出 $F|_{[b,1]}$ 严格递增),在 $(b,1)$ 上必有一点 x_0,使 $a<f(x_0)<p$,那么 $f|_{[f(x_0),p]}$ 必严格递增,从而 $F|_{[f(x_0),p]}$ 严格递增,这是不可能的.如果 $f(x)\in J(I,[a,b])$ 且 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,则 $f([a,b])>b$ 或 $f([a,b])<a$,若 $f([a,b])>b$,由引理 2 知 $f(I)\subset[b,1]$,从而 $F(I)\subset[b,1]$,这与 $F(1)<F(b)=p=b$ 矛盾,若 $f([a,b])<a$,我们又会推出 $F(I)\subset[0,a]$,从而 $p\leqslant a$ 矛盾.同理,我们也可证明 $f(x)\notin S(I,[a,b])$.综合上述,$F(x)$ 无 n 阶迭代根.

3) 若 $F(0)>0=F(1)$,设对某自然数 $n\geqslant 2$,存在 $f(x)\in C^0([0,1])$,使 $f^n(x)=F(x)$,那么由引理 2 知 $f([a,b])\subset[a,b]$ 或 $f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$.如果 $f([a,b])\subset[a,b]$,因 $f|_{[0,a]}$ 及 $f|_{[b,1]}$ 严格单调,则必须有 $f(1)=0<f(0)=1$(因 $F(1)=0<F(0)$),从而 $F(0)\in\{0,1\}$,矛盾.如果 $f(x)\in J(I,[a,b])$ 且 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,则 $f([a,b])<a$(引理 2),又 $F(1)=0$,从而 $f(0)=f(1)=0$,即 $F(0)=0$ 与已知矛盾.若 $f(x)\in S(I,[a,b])$ 且 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,这时,必须 $f|_{[a,b]}=0$,由引理 2 知 $f(I)\subset[0,a]$ 且 $f(1)=a$.如果 $0<f(0)<a$,由 $f|_{[0,a]}$ 的严格单调性,我们归纳地可证明 $0<F(a)<a$,这与 $F(a)=p\geqslant a$ 矛盾.从而 $f(0)=a$,

这时 $F(0)\in\{0,a\}$,而 $F([0,1])\leqslant a$,所以 $p\leqslant a$,从而 $p=a$,$F(0)\in\{0,p\}$,这是矛盾的.即 $F(x)$ 无 n 阶迭代根.

3 H_3 类映射的迭代根

定理 4 设 $F(x)\in H_3$,那么

1) 若 $F(0)=0$ 或 $F(0)F(1)>0$,则对任自然数 $n\geqslant 2$,$F(x)$ 有 n 阶迭代根.

2) 若 $F(0)>0=F(1)$,则对任自然数 $n\geqslant 3$,$F(x)$ 无 n 阶迭代根.

证明 1) 仿照定理 3的 1) 的证明,我们可以证明存在 $\bar f(x)\in C^0([0,a])$,使 $\bar f^n(x)=F|_{[0,a]}$ 且满足: (i) 若 $F(0)=0$,则 $\bar f(0)=0<F(b)\leqslant \bar f^{n-1}(a)$; (ii) 若 $F(0)>0$,则 $\bar f^{n-1}(0)<\min\{F(0),F(1)\}<F(b)\leqslant \bar f^{n-1}(a)$.令

$$f(x)=\begin{cases}\bar f(x), & x\in[0,a],\\ (\bar f^{n-1})^{-1}\circ F(x), & x\in[a,1].\end{cases}$$

则 $f(x)$ 满足 1) 的要求.

2) 用反证法,假设 $n\geqslant 3$ 时,$F(x)$ 有 n 阶迭代根 $f(x)$,由于 $F|_{[a,b]}$ 无不动点,$f(x)\in J(I,[a,b])\cup S(I,[a,b])$ 且 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$.如果 $f(x)\in J(I,[a,b])$ 且 $f([a,b])\cap[a,b]=\varnothing$,则 $f([a,b])<a$,由 $F(0)>0$ 得 $f(0)>0$,从而 $f(1)=0$,最后得 $F(1)=f^{n-1}(0)>0$,矛盾.如果 $f(x)\in S(I,[a,b])$,那么 $f|_{[a,b]}=0$ 且 $f(I)\subset[0,a]$.若 $f(1)<a$,则推出 $F(1)>0$ 矛盾,所以 $f(1)=a$,这时 $f^2(1)=0$,从而 $f(0)=a$,最后有 $F(0)\in\{0,a\}$,这与已知矛盾.综上所述,$F(x)$ 无 $n(\geqslant 3)$ 阶迭代根.

定理 5 设 $F(x)\in H_3$,$F(0)>0=F(1)$,则 $F(x)$ 有 2阶迭代根的充要条件是: 存在 $F(x)$ 的不动点 $x_0\in(0,a)$,使 $F|_{[0,x_0]}$ 与 $F|_{[x_0,a]}$ 反向拓扑共轭.

证明 ($\Leftarrow$).若存在 $F(x)$ 的不动点 x_0 及反向拓扑共轭同胚 $h:[x_0,a]\to[0,x_0]$ 使 $F|_{[0,x_0]}\circ h=h\circ F|_{[x_0,a]}$,则取

$$f_1(x)=\begin{cases}F|_{[x_0,a]}\circ h^{-1}(x), & x\in[0,x_0],\\ h(x), & x\in[x_0,a].\end{cases}$$

令

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in[0,a],\\ f_1^{-1}\circ F(x), & x\in[a,1].\end{cases}$$

则 $f(x)$ 就是 $F(x)$ 的 2阶迭代根.

($\Rightarrow$).设 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 2阶迭代根,由引理 2知 $f(x)\in S(I,[a,b])$ 且 $f(I)\subset[0,a]$ 或 $f(x)\in J(I,[a,b])$ 且 $f(I)\subset[0,a]$.如果 $f(x)\in J(I,[a,b])$,则 $f(0)>0=f(1)$,那么 $F(1)=f(0)>0$ 矛盾.所以 $f(x)\in S(I,[a,b])$,这时 $f|_{[a,b]}=0$(因 $F(1)=0$),从而 $f|_{[0,a]}(\in C^0([0,a]))$ 是 $F|_{[0,a]}$ 的 2阶迭代根,设 $f|_{[0,a]}$ 的不动点是 x_0,则 x_0 是 $F(x)$ 的不动点,取 $h(x)=f|_{[x_0,a]}$,那么 $F|_{[0,x_0]}\circ h=h\circ F|_{[x_0,a]}$.

参考文献

1 Zhang Weinian. A genreic property of globally smooth iterative roots. Sciences in China (series A), 1995, 38 (3): 267~ 272.

2 Zhang Weinian. PM functions their characteristic intervals and iterative roots. Ann Polonici Math, LXV, 1997, 2 119 ~ 128.

3 张伟年.关于具有两端可微性的迭代根的存在可能性的问题.数学季刊, 1989, (4): 31~ 38.

4 孙太祥,席鸿建.区间上 k 段单调连续自映射的 k 阶迭代根.数学研究与评论, 1998, 18 (4): 575~ 579.

5 张景中,杨 路.论逐段单调连续函数的迭代根.数学学报, 1983, 24 (4): 398~ 412.

6 孙太祥,席鸿建.区间上 N 型函数的迭代根.数学研究, 1996, 29 (2): 40~ 45.

(责任编辑: 邓大玉)

澳大利亚培育出能成活的完全三倍体鸡

据澳大利亚联邦科学和工业研究组织报道,该组织的遗传所禽类研究室与悉尼大学兽医学院合作,从 White leg horax Australop 杂交鸡中选育出一个在世界上首次能产生高达 5%~ 8% 存活率三倍体鸡后代的族系,提供了一个能收集足够数量性腺来观察其发育过程的机会,这在科学上是一大突破。

培育出的两种三倍体鸡的染色体为 3A: ZZW 和 3A: ZZZ,均能活到成年,但都是不育的。3A: ZZW 存 20周龄左右,便从外形上由母鸡转变为公鸡,而 3A: ZZZ 的外形发育类似正常的公鸡,但其精液只含有畸形精子和精子细胞。他们用性激素处理鸡胚试图得到正常功能的三倍体鸡 例如用雌二醇处理 4月龄的 3A: ZZW 鸡胚.孵出的小鸡性腺结构非常接近正常的母鸡,今后如能得到产卵的三倍体 3A: ZZW 鸡,对查明遗传基因和性激素对性别分化所起的作用,对人工控制鸡群性别都有十分重要的意义。

(摘自《科学时报》 2000年 5月 9日)