DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.03.005
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (3): 180~182

Bernoulli数与素数的判别*
Discrimination between Bernoulli's Numbers and Prime Numbers

王云葵

Wang Yunkui

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁市西乡塘 530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 利用等幂和与判别素数的充要条件,获得了 Bernoulli数与判别素数的充要条件,得到了整除 Bernoulli数分子的判别方法.

关键词 等幂和 Bernoulli数 充要条件
中图法分类号 O 156

Abstract We make use of necessary and sufficient condition for discriminant prime numbers and sum of equal powers, gain necessary and sufficient condition for discriminant prime numbers and Bernoulli's numbers, we also abtain discriminant method on the exactly divisible Bernoulli's numbers.

Key words sum of equal powers, Bernoulli's numbers, necessary and sufficient condition

等幂和 $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$ 是一个古老而有趣的问题,它与著名的 Bernoulli数 B_m 有着密切的联系[1]:

$$nB_{2m} + mnS_{2m-1}(n-1) = \sum_{j=0}^{m} C_{2m}^{2j} B_{2j} n^{2j} S_{2m-2j}(n-1). \quad (1)$$

等幂和与 Bernoulli数在数论研究中占有极其重要的地位,它们不仅与丢番图方程 G. Giuga猜想[2]、Bowen猜想[3]有关,而且与判别素数的充要条件等密切相连[4,5]. 特别地, Bernoulli数在 Fermat大定理的研究中很有用. 1857年 Kummer证明了[6]: $p > 3$为正规素数的充要条件是: p不整除 Bernoulli数 B_{2k} $(2 \leqslant 2k \leqslant p-3)$ 的分子,并且若 p为正规素数,则 Fermat大定理成立. 1929年 Vandiver证明了[6]: 若 p^3不整除 B_{2pk} $(2 \leqslant 2k \leqslant p-3)$的分子,则 Fermat大定理成立. 1992年以来,作者对此进行了大量的研究[7~10],求得了前 110个 Bernoulli数的值,获得了 Bernoulli数的通解公式及其同余关系,从而获得了 G. Giuga猜想与 Bowen猜想的深刻结果. 本文进一步获得了 Bernoulli数与判别素数的充要条件,从而获得了整除 Bernoulli数的充要条件及其奇妙性质.

1999-09-28收稿.

* 广西民族学院重点科研基金资助课题 (98SXX00002).

1 等幂和与 Bernoulli数的同余关系

引理 1[2] $m \geqslant 1, n \geqslant 2$,则 $n \nmid nB_{2m}$ 的分母.

引理 2[4] p为素数的充要条件是,满足

1) 当 $p-1 \nmid m$ 时, $S_m(p-1) \equiv 0 \pmod p$,

2) 当 $p-1 \mid m$ 时, $S_m(p-1) \equiv -1 \pmod p$.

引理 3[4] 奇数 p为素数的充要条件是,满足

1) 对 $2 \leqslant 2m \leqslant \frac{p}{5} - 1$有 $S_{2m}(p-1) \equiv 0 \pmod p$,

2) $S_{p-1}(p-1) \equiv -1 \pmod p$.

引理 4[7] $m \geqslant 1, p \geqslant 3$为奇数,则

$$S_{2m}(p-1) \equiv 2S_{2m}\left(\frac{p-1}{2}\right) - 2mpS_{2m-1}\left(\frac{p-1}{2}\right) + p^2 C_{2m}^2 S_{2m-2}\left(\frac{p-1}{2}\right) \pmod{p^3}, \quad (2)$$

$$2S_{2m+1}(p-1) \equiv (2m+1)pS_{2m}(p-1) - \frac{1}{2}p^3 C_{2m+1}^3 S_{2m-2}(p-1) \pmod{p^4}. \quad (3)$$

定理 1 $m \geqslant 2, p \geqslant 3$为奇数,则

$$S_{2m}(p-1) \equiv pB_{2m} + \frac{1}{3}p^2 C_{2m}^3 S_{2m-2}(p-1) \pmod{p^3}, \quad (4)$$

$$S_{2m}(p-1) \equiv pB_{2m} + \frac{1}{3}p^3 C_{2m}^2 B_{2m-2} \pmod{p^3}. \quad (5)$$

证明 由引理 1有 $p^3 \mid p^{2j} B_{2j}$ $(2 \leqslant j \leqslant m)$,由 (1)

式得

$$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}+mpS_{2m-1}(p-1)-\frac{1}{6}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\pmod{p^3}. \tag{6}$$

因 $m\geqslant 2$,由(3)得 $2S_{2m-1}(p-1)\equiv(2m-1)pS_{2m-2}(p-1)\pmod{p^2}$,故

$$2mpS_{2m-1}(p-1)\equiv p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\pmod{p^3}. \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式即得(4)式,从而 $S_{2m-2}(p-1)\equiv pB_{2m-2}\pmod{p^2}$,再代入(4)式即得(5)式.

定理 2 $m\geqslant 2,p\geqslant 5$为奇数,$p|C_{2m}^2$则

$$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}+\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\pmod{p^4}, \tag{8}$$

$$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}+\frac{1}{3}p^3C_{2m}^2B_{2m-2}\pmod{p^4}. \tag{9}$$

证明 由引理1有 $p^5|p^{2j}B_{2j}(3\leqslant j\leqslant m)$,利用(1)式及 $B_2=\frac{1}{6},B_4=-\frac{1}{30}$得

$$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}+mpS_{2m-1}(p-1)-\frac{1}{6}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)+\frac{1}{30}p^4C_{2m}^4S_{2m-4}(p-1)\pmod{p^5}, \tag{10}$$

因 $p|C_{2m}^2$,故 $p|C_{2m}^4,p|C_{2m+1}^3$,由(3)式和(10)式得

$$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}+mpS_{2m-1}(p-1)-\frac{1}{6}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\pmod{p^4}, \tag{11}$$

$$2mS_{2m-1}(p-1)\equiv pC_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\pmod{p^4}. \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式即得(8)式,从而 $S_{2m-2}(p-1)\equiv pB_{2m-2}\pmod{p^3}$,再代入(8)式即得(9)式.

2 Bernoulli数与判别素数的充要条件

1950年 G. Giuga猜想: p为素数的充要条件是,$S_{p-1}(p-1)\equiv-1\pmod p$.康继鼎和周国富[11]、王云葵[8]、周晓东[12]、杨仕椿[13]等人进行了研究,1998年王云葵利用 Bernoulli数获得 G. Giuga猜想的深刻结果[5],本文获得 G. Giuga猜想的等价命题.

引理 5[5] 奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)当 $p-1\nmid 2m$时,p与 B_{2m}的分母互素,

2)当 $p-1|2m$时,$p|(pB_{2m}+1)$的分子.

引理 6[5] 奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)对 $2\leqslant 2m\leqslant\frac{p}{5}-1$有 p与 B_{2m}的分母互素,

2)$p|(pB_{p-1}+1)$的分子.

引理 7[1] $m\geqslant 1$,设满足 $p-1|2m$的所有素数为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$,则 B_{2m}的分母是 $p_1,p_2,\cdots,p_s(s\geqslant 2)$,并且 $B_{2m}=a_{2m}-\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{p_j}$,其中 a_{2m}为整数.

定理 3 奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)当 $p-1\nmid 2m$时,$S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod p$,

2)当 $p-1|2m$时,$S_{2m}(p-1)\equiv-1\pmod p$.

证明 对任何奇数 $p\geqslant 3$有 $p-1\nmid 2m-1$,且由(3)式有 $S_{2m+1}(p-1)\equiv 0\pmod p$,故由引理2即得证.

定理 4 奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)当 $p-1\nmid 2m$时,$S_{2m}(\frac{p-1}{2})\equiv 0\pmod p$,

2)当 $p-1|2m$时,$S_{2m}(\frac{p-1}{2})\equiv\frac{p-1}{2}\pmod p$.

证明 由(2)式对任何奇数 $p\geqslant 3$有 $S_{2m}(p-1)\equiv 2S_{2m}(\frac{p-1}{2})\pmod p$,故 $S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow S_{2m}(\frac{p-1}{2})\equiv 0\pmod p$,$S_{2m}(p-1)\equiv-1\pmod p\Leftrightarrow S_{2m}(\frac{p-1}{2})\equiv\frac{p-1}{2}\pmod p$,故由定理3即得证.

定理 5 $m\geqslant 2,(p,3)=1,p\nmid C_{2m}^2$,则奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)当 $p-1\nmid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\pmod{p^3}$,

2)当 $p-1|2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}-\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2\pmod{p^3}$.

证明 因 $(p,3)=1,p\nmid C_{2m}^2$,故对任何奇数 $p\geqslant 3$有

$S_{2m-2}(p-1)\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\equiv 0\pmod{p^3}$,

$S_{2m-2}(p-1)\equiv-1\pmod p\Leftrightarrow\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\equiv-\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2\pmod{p^3}$.

再由(4)式及定理3即得证.

定理 6 $m\geqslant 2,(p,3)=1,p\|C_{2m}^2$,则奇数 p为素数的充要条件是,满足

1)当 $p-1\nmid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\pmod{p^4}$,

2)当 $p-1|2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}-\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2\pmod{p^4}$.

证明 由已知条件知,对任何奇数 p有

$S_{2m-2}(p-1)\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2S_{2m-2}(p-1)\equiv 0\pmod{p^4}$,

$S_{2m-2}(p-1)\equiv -1 \pmod p \Leftrightarrow \frac{1}{3}p^2 C_{2m}^2 S_{2m-2}(p-1)\equiv -\frac{1}{3}p^2 C_{2m}^2 \pmod {p^4}$.

故由(8)式及定理 3即得证.

定理 7 $(3,p)=1$,则奇数 p为素数的充要条件是,满足

1) 对 $4\leqslant 2m\leqslant \frac{p}{5}+1$有

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\pmod {p^3}$,

2) $S_{p+1}(p-1)\equiv pB_{p-1}-\frac{1}{6}p^3\pmod {p^4}$.

证明 由(4)式、(8)式及已知得

$S_{2m-2}(p-1)\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\pmod {p^3}$,

$S_{p-1}(p-1)\equiv -1\pmod p\Leftrightarrow S_{p+1}(p-1)\equiv pB_{p+1}-\frac{1}{6}p^3\pmod {p^4}$.

再由引理 3即得证.

定理 8 设满足 $p_i-1\mid 2m$ 的所有素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$,则奇数 p为素数的充要条件是,满足

1) 当 $p-1\nmid 2m$时,$(p,p_1p_2\cdots p_s)=1$,

2) 当 $p-1\mid 2m$时 $\sum_{j=1}^{s}\frac{p}{p_j}\equiv 1\pmod p$.

证明 由引理 7,B_{2m}的分母是 $p_1p_2\cdots p_s$,并且 $B_{2m}=a_{2m}-\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{p_j}$,$a_{2m}$为整数,故

p与 B_{2m}的分母互素$\Leftrightarrow(p,p_1p_2\cdots p_s)=1$,

$p\mid(pB_{2m}+1)$的分子$\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{s}\frac{p}{p_j}\equiv 1\pmod p$.

再由引理 5即得证.

定理 9 $2\leqslant 2m\leqslant \frac{p}{5}-1$,满足 $p_i-1\mid 2m$,$q_i-1\mid p-1$的素数分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$与 $q_1,q_2,\cdots,q_r$,则奇数 p为素数的充要条件是,满足

1) $(p,p_1p_2\cdots p_s)=1$; 2) $\sum_{j=1}^{r}\frac{p}{q_j}\equiv 1\pmod p$.

证明 类似于定理 8, 利用引理 6 7即得证.

3 整除 Bernoulli数的充要条件

1874年 Kummer证明了 164以内的非正规素数只有 8个: $37\mid B_{32}$, $59\mid B_{44}$, $67\mid B_{58}$, $101\mid B_{68}$, $103\mid B_{24}$, $131\mid B_{22}$, $149\mid B_{130}$, $157\mid B_{62}$, $157\mid B_{110}$.对此我们有

定理 10 $m\geqslant 2$, $p\geqslant 5$为素数,则 $p\mid B_{2m}$的充要条件是,$p-1\nmid 2m$, $S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod {p^2}$.

证明 由(4)式对任何素数 $p\geqslant 5$有

$S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\pmod {p^2}$.

必要性 $p\mid B_{2m}$,则 $p\nmid B_{2m}$的分母,由引理 7,$p-1\nmid 2m$,故 $S_{2m}(p-1)\equiv pB_{2m}\equiv 0\pmod {p^2}$.

充分性 $p-1\nmid 2m$则 $p\nmid B_{2m}$的分母,由(13)有 $pB_{2m}\equiv S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod {p^2}$,故 $B_{2m}\equiv 0\pmod p$.

利用定理 5 定理 6,完全类似地有

定理 11 $m\geqslant 2$, $p\geqslant 5$为素数,$p\nmid C_{2m}^2$,则 $p^2\mid B_{2m}$的充要条件是,$p-1\nmid 2m$,并且满足.

1) 当 $p-1\nmid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod {p^3}$,

2) 当 $p-1\mid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv -\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2\pmod {p^3}$.

定理 12 $m\geqslant 2$, $p\geqslant 5$为素数,$p\| C_{2m}^2$,则 $p^3\| B_{2m}$的充要条件是,$p-1\nmid 2m$,并且满足

1) 当 $p-1\nmid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv 0\pmod {p^4}$,

2) 当 $p-1\mid 2m-2$时,

$S_{2m}(p-1)\equiv -\frac{1}{3}p^2C_{2m}^2\pmod {p^4}$.

猜想 1 素数 $p\mid 2m$, $p-1\nmid 2m$,则必有 $p\mid B_{2m}$.

猜想 2 p为素数,$p-1\nmid 2m$,则

$B_{2mp}\equiv pB_{2m}\pmod {p^2}$.

参考文献

1 邓培民, 王云葵. 关于伯努利数结构的讨论. 广西师范大学学报, 1995, 13 (4): 4~ 9.

2 邓培民, 王云葵. 关于伯努利数结构的讨论 (续). 广西师范大学学报, 1996, 14 (4): 1~ 5.

3 王云葵. 等幂和的分解与波文猜想. 桂林地区教育学院学报, 1998, 17 (4): 53~ 56.

4 王云葵. 等幂和与判别素数的充要条件. 数学通报, 1996, (6): 46~ 47.

5 王云葵. 伯努利数与判别素数的充要条件. 广西民族学院学报, 1998, 4 (1): 11~ 13.

6 胡作玄. 350年历程—— 从费尔马到维尔斯. 济南: 山东教育出版社, 1996. 121~ 130.

7 王云葵. 等幂和的分解及其同余式链. 天中学刊, 1999, 14 (5): 1~ 3.

8 王云葵. 居加猜想研究及其新进展. 全国第三届初等数学研究学术交流会论文集, 1996. 482~ 491.

9 王云葵. 关于 Bernoulli数的同余关系. 广西科学, 1999, 6 (4): 1~ 3.

10 王云葵. 关于等幂和与 Bernoulli 数的通解公式. 广西大学学报, 1999, 24 (增刊): 68~ 70.

11 康继鼎, 周国富. 关于居加猜测与费尔马数为伪素数的充要条件. 数学通报, 1981, (12): 20~ 22.

12 周晓东. G Giuga猜想与 Carmicheal数. 宁波高等专科学校学报, 1990, (1): 8~ 13.

13 杨仕椿. 绝对伪素数与居加猜想. 数学通讯, 1993, (4): 17~ 18.

(责任编辑: 黎贞崇)