DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.03.007
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (3): 187~ 189

具输入饱和因子的不确定广义系统的鲁棒镇定*

Robust Stability of Uncertain Singular Systems with Input Saturating Actuators

梁家荣　　霍　林
Liang Jiarong　　Huo Lin

(广西大学计算机与信息工程学院　南宁市西乡塘路 10号　530004)
(College of Comp. and Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　利用 Lyapunov 函数方法,对一类广义系统,设计了镇定控制器,保证其闭环系统渐近稳定,对另一类广义系统给出了使其闭环系统 E-渐近稳定的充分条件,给出数值实例说明文中定理的可行性.

关键词　不确定广义系统　输入饱和因子　鲁棒镇定
中图法分类号　TP 13

Abstract　The singular Lyapunov's method is employed to uncertain singular systems with saturating actuators, the stability controller is designed to guarantee the asymptotic stability of closed loop system for a class singular systems, the sufficient condition for the E-asymptotic stability of closed loop systems to other class singular systems. An example is given to the feasibility for the law.

Key words　uncertain singular systems, input saturating actuators, robust stabilization

在控制系统的设计中,常常会遇到扰动现象.在扰动发生的情况下,设计控制器,使闭环系统渐近稳定的问题就是鲁棒镇定问题.在正常系统中,关于镇定问题已有不少成熟的结果,在广义系统中对不确定系统的鲁棒镇定也得到了研究[1~3],但由于广义系统通常含有脉冲行为,致使传统的 Lyapunov 方法不能直接应用于此类系统,从而使得对扰动广义系统的镇定问题目前还没有成熟的方法,例如对具输入饱和因子的扰动广义系统的鲁棒镇定问题,尚未有文献研究,原因在于一方面扰动的存在,广义系统的解含有脉冲行为,另一方面饱和因子的作用.本文在文献[4]的基础上,利用广义 Lyapunov 方法分别就状态系数不具摄动而饱和因子系数具有扰动及状态系数项与饱和因子系数项均具有摄动的广义系统进行研究,提出了这两种情形的鲁棒镇定控制器的设计方法.

1　定义及引理

考虑如下的广义系统:

$$E\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

其中 $E\in R^{n\times n}$, $f(t,x)$ 为: $R\times R^n\rightarrow R^n$ 上的向量函数, $\det E = 0$,下面假设 (1) 的满足相容初始条件的解存在且唯一.

定义 1[4]　称广义系统 (1) 为 E- 稳定的,如果对于任意的 $X>0$,存在 $W>0$ 使得当 $\|Ex_0\|<W$ 时,恒有 $\|Ex\|<X$,其中 $x(t)$ 是满足相容初始条件 $Ex(0)=Ex_0$ 的解.

定义 2[4]　称广义系统 (1) 为 E-渐近稳定的,如果 (1) 为 E- 稳定的,且 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$.

引理 1[5]　设 $X\in R^{n\times n}$, $Y\in R^{n\times n}$, $y\in R^n$,则以下不等式成立:

1) $y^TXYy\leqslant \|XY\|\, y^Ty\leqslant \|X\|\,\|Y\|\, y^Ty$;

2) $2y^TXYy\leqslant y^T(\frac{1}{r}XX^T+rY^TY)y, \forall r>0$.

假设 $H\in R^{n\times n}$, $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ 分别表示 H 的最大特征值和最小特征值, $X>Y$ ($X\geqslant Y$) 表示 $X-Y$ 是正定阵 (半正定阵).

2　主要结果

考虑如下具输入饱和因子的不确定广义系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + (B+\Delta B)\mathrm{Sat}u, \tag{2}$$

$x\in R^n$ 为状态, $u\in R^m$ 为控制, (A,B) 为能控对, $\mathrm{rank}E = r<n$,假设 (E,A) 正则,即存在纯量 s,使 $(sE-A)$ 可逆,饱和函数 $\mathrm{Sat}u(t) = (\mathrm{Sat}u_1, \mathrm{Sat}u_2, \cdots, \mathrm{Sat}u_m)^T$,而

2000-04-03收稿, 2000-05-09修回。
* 广西自然科学基金 (桂科基 0009007)和广西大学博士科研启动基金资助项目。

$$\mathrm{Sat}u_i=\begin{cases}u_i^+, & u_i>u_i^+,\\ u_i, & -u_i^+\leqslant u_i\leqslant u_i^+,\\ -u_i^+, & u_i<-u_i^+.\end{cases}$$

设 $\|\Delta B\|\leqslant U$，(2)式对应的无控制的参考系统为：

$$E\dot{x}(t)=Ax(t). \tag{3}$$

定理 1 对于系统(2)，如果存在正定矩阵 V，W，矩阵 K 及常量 $X>0$ 使得：

$$A_c^TVE+E^TVA_c+U\|K\|\,\|V\|\,E^TE+(\|B\|+U)\|V\|\,E^TE\leqslant -XE^TWE,$$

其中 $A_c=A+\frac{1}{2}BKE$，则系统(2)在控制 $u=-KEx(t)$ 的作用下，其闭环系统是 E-渐近稳定的.

证明 在控制 $u=-KEx(t)$ 的作用下，(2)的闭环系统为：

$$E\dot{x}(t)=(A_c+\frac{1}{2}\Delta BKE)x(t)+(B+\Delta B)(\mathrm{Sat}(-KEx(t))-\frac{1}{2}KEx(t)). \tag{4}$$

取(4)式的广义 Lyapunov 函数为：

$$v(Ex(t))=(Ex(t))^TV(Ex(t)).$$

沿着闭环系统(4)的导数为：

$$\dot{v}(Ex(t))|_{(4)}=x^T(t)[A_c^TVE+E^TVA_c^T]x(t)+(Ex(t))^TV\Delta BKEx(t)+2(Ex(t))^TV(B+\Delta B)[\mathrm{Sat}(-KEx(t))-\frac{1}{2}KEx(t)]\leqslant x^T(t)[A_c^TVE+E^TVA_c^T]x(t)+U\|V\|\,\|K\|(Ex(t))^T(Ex(t))+\|V\|(\|B\|+U)\|K\|(Ex(t))^T(Ex(t))=x^T(t)[A_c^TVE+E^TVA_c^T+U\|V\|\,\|K\|E^TE+\|V\|(\|B\|+U)\|K\|E^TE]x(t)\leqslant -X(Ex(t))^TW(Ex(t)).$$

由 $v(Ex(t))$ 是关于 $Ex(t)$ 的正定阵，而 $\dot{v}(Ex(t))|_{(4)}$ 是关于 $Ex(t)$ 的负定阵，因此 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$ 即闭环系统(4)是 E-渐近稳定的.

定理 2 若对系统(2)，定理 1 的条件得到满足，且(2)的参考系统(3)是脉冲自由的，则闭环系统(4)是 Lyapunov 意义下渐近稳定的.

证明 由定理 1，对闭环系统(4)的解 $x(t)$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$，此外，由(3)是脉冲自由的，因而存在可逆阵 P，Q，使得：

$$PEQ=\begin{pmatrix}I_1&0\\0&0\end{pmatrix},\ PAQ=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 I_1 和 I_2 分别为 $r\times r$ 和 $(n-r)\times(n-r)$ 阶单位阵，对闭环系统(4)作变换 $y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=Q^{-1}x(t)$，则(4)式等价于如下的系统：

$$\dot{y}_1=A_{11}y_1(t)+A_{12}y_2(t)+h_1(t), \tag{5}$$

$$0=A_{21}y_1(t)+y_2(t)+h_2(t), \tag{6}$$

其中 $\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=P(B+\Delta B)\mathrm{Sat}u$ 因为

$\|P(B+\Delta B)\mathrm{Sat}u\|\leqslant\|P\|(\|B\|+U)\|u(t)\|\leqslant\|P\|(\|B\|+U)\|K\|\,\|Ex(t)\|$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}h_1(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}h_2(t)=0$，由 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$，易知 $\lim\limits_{t\to\infty}y_1=0$，再由(6)式易得 $y_2(t)=-(A_{21}y_1(t)+h_2(t))$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}y_2=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.即闭环系统(4)是 Lyapunov 意义下渐近稳定的.

再考虑如下的广义扰动系统：

$$E\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)\mathrm{Sat}u, \tag{7}$$

其中 $E,A,B,\Delta B,\mathrm{Sat}u$ 的意义同上，$\Delta A^T\Delta A\leqslant TE^TE$.

定理 3 若存在正定阵 V_1,W_1 和 K_1，纯量 r_1，X，使得

$$A_c^TV_1E+E^TV_1E+rTE^TE+\frac{1}{r}E^TV_1^2E+U\lambda_{\max}(V_1)\|K_1\|E^TE+(\|B\|+U)\lambda_{\max}(V_1)E^TE\leqslant -XE^TW_1E,$$

则在控制 $u=-K_1Ex(t)$ 的作用下，(7)式的闭环系统是 E-渐近稳定的.

证明 在控制 $u=-K_1Ex(t)$ 的作用下，(7)式的闭环系统为：

$$E\dot{x}(t)=A_cx(t)+(\Delta A+\frac{1}{2}\Delta BKE)x(t)+(B+\Delta B)(\mathrm{Sat}(-K_1Ex(t))-\frac{1}{2}K_1Ex(t)), \tag{8}$$

取(8)式的广义 Lyapunov 函数为：

$$v(Ex(t))=(Ex(t))^TV_1(Ex(t)),$$

沿着(8)式的导数

$$\dot{v}(Ex(t))\leqslant x^T(t)(E^TV_1A_c+A_c^TV_1E)x(t)+2(Ex(t))^TV\Delta Ax(t)+(Ex(t))^TV\Delta BK_1Ex(t)+2(Ex(t))^TV_1(B+\Delta B)[\mathrm{Sat}(-K_1Ex(t))-\frac{1}{2}K_1Ex(t)],$$

由引理 1，注意到

$$2(Ex(t))^TV\Delta Ax(t)\leqslant rx^T(t)\Delta A^T\Delta Ax(t)+\frac{1}{r}x^T(t)E^TV_1Ex(t)\leqslant rTx^T(t)E^TEx(t)+x^T(t)E^TV_1Ex(t),$$

代入上述不等式，再仿定理 1 的证明易证(8)是 E-渐近稳定的.

3 实例

考虑如下不确定广义系统：

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+(B+\Delta B)\mathrm{Sat}u, \tag{9}$$

其中

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{15}{16}&0&0\\0&0&-\frac{15}{16}\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \|\Delta B\|\leqslant U=\frac{8}{5},$$

取 $W=I, V=\frac{1}{2}I, X=1, K=\frac{1}{4}I$,容易验证定理 1 的条件得到满足,由此在控制 $u=-\frac{1}{4}Ex(t)$ 的作用下,(9) 的闭环系统是渐近稳定的.

参考文献

1 刘永清,温香彩. 广义系统的变结构控制. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.

2 刘永清. 具时滞的不确定广义系统的鲁棒稳定性. 华南理工大学学报, 1996, 24 (5): 44~ 50.

3 张庆灵. 广义线性系统的鲁棒稳定性分析与综合. 控制理论与应用, 1999, 16 (4): 525~ 528.

4 梁家荣. 具输入饱和因子的广义系统的镇定. 自动化学报, 1999, 25 (4): 532~ 536.

5 Jin-Hoon Kim, Zeungnam. Bien robust stability of uncertain linear system with saturating actuators. IEEE Transaction on Automatic Control. 1994, 39 (1): 202~ 205.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 186页 Continue from page 186)

利用引理 2可以证明在定理 1与定理 2的相应条件下, (1) 式的零解是一致 (渐近) 稳定. 下面只给出定理 1与定理 2零解一致稳定性证明,关于一致渐近稳定性的证明, 注意到在条件 (7)、(8) 式下引理 2的 $\gamma<1$, 从而可以仿文献 [5] 完成证明, 此处从略.

定理 1 2的一致稳定性证明:

设 $\|x_{n_0}\|\leqslant X$,其中 $X\leqslant M(1+\_{0})^{-2k}$,由 (4)式或 (5) 式,不难得到

$|x(i)|\leqslant(1+\_{0})^{i}\|x_{n_0}\|\leqslant(1+\_{0})^{i}X, i\in Z(n_0,n_0+2k)$.

下面证明当 $n\in Z(n_0+2k)$ 时, $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$. 实际上,若 $|x(n)|\leqslant\|x_n\|_3$,则存在 $i_0\in Z(n-3k,n-1)$, 使得 $|x(n_0)|=\|x_n\|_3$, 从而 $\|x_n\|_3=|x(n_0)|\leqslant\|x_{n-1}\|_3$, 若 $|x(n)|=\|x_n\|_3$,则也有 $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$. 若不然, $\|x_n\|_3>\|x_{n-1}\|_3$, 从而 $|x(n)|>\|x_{n-1}\|_3$,不妨设 $x(n)>0$,于是 $0<x(n)-x(n-1)=F(n-1,x_{n-1})$. 由 (4)式或 (5)式可知,存在 $n_1\in Z(n-k,n)$ 使得 $x(n_1-1)<0$,而 $x(m)\geqslant 0, m\in Z(n_1,n)$. 由引理 2, $x(n)\leqslant V\|x_{n_1-1}\|_2\leqslant\|x_{n_1-1}\|_2\leqslant\|x_{n-1}\|$. 矛盾. 从而当 $n\in Z(n_0+2k)$ 时,总有 $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$ 成立,故 $|x(n)|\leqslant\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n_0+2k}\|_3\leqslant(1+\_{0})^{2k}X, n\in Z(n_0+2k)$. 由此不难得到 (1) 的零解一致稳定性.

关于定理 3的证明: 只需注意在 $k\leqslant 2$ 或 $k_1\geqslant[\frac{1}{\_{0}}]$ 或 $\frac{1}{\_{0}}\geqslant k$ 的条件下,要保证引理 2成立,只需 $\_{1}\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}$.

关于定理 4的证明: 在条件 (11) 下,定理 4相当于定理 3中 $k_1=k, \_{0}=2, \_{1}=2(k+1)$ 的特殊情况.

参考文献

1 庚建设. 线性时滞差分方程的稳定性. 见: 全国第五届常微分方程稳定性理论及应用学术会议论文集, 大连: 大连海事大学出版社, 1996.

2 Yoneyama T. On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations. J Math Anal Appl, 1987, 125: 161~ 173.

3 Zhou Z, Zhang Q Q. Uniform stability of nonlinear difference systems. J Math Anal Appl, 1998, 225: 486 ~ 500.

4 陈武华. 一类非线性时滞差分方程的渐近稳定性. 应用数学, 1998, 11 (1): 55~ 60.

5 陈武华. 有限时滞差分方程的一致渐近稳定性. 广西民族学院学报 (自然科学版), 1999, 5 (3): 1~ 4.

(责任编辑: 黎贞崇)