DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (4): 254~ 256

一类具时滞反应罐方程的 Hopf分支*
Hopf Bifurcation of a Chemostat Equation with Delay

梁肇华　　李宪高
Liang Zhaohua　　Li Xiangao

(广西教育学院数学系　南宁市建政路　530023)
(Dept. of Math., Education College of Guangxi, Jianzhenglu, Nanning, Guangxi, 530023, China)

摘要　通过引进微生物的成熟期作时滞，给出反应罐的新模型，并给出此新模型的 Hopf分支的分析.
关键词　反应罐模型　Hopf分支　时滞　渐近稳定性
中图法分类号　O 175

Abstract　The new chemostat model is developed by using the delay of maturity of organism. The Hopf bifurcations of the new model is discussed.
Key words　chemostat model, Hopf bifurcation, delay, asymptotical stability

反应罐是一个用于连续培养微生物的实验装置.实际上，反应罐是一个简化了的湖泊模型，因而有着重要的生态意义.有关反应罐模型的研究是目前非常活跃的研究课题，引来众多学者的注意[1~5]. 由于微生物在吸收养料后有一段消化期以及从消耗到细胞分裂也有一段成熟期， Caperon[6]首先把时滞引入反应罐模型，但他的模型是不合理的，因为有可能出现负的培养基浓度，因而有对 Caperon模型进行了修正的工作[2,7]. 具时滞反应罐基本模型是:

$$\begin{cases} S'(t) = (S^0 - S(t))D - \dfrac{1}{r}P(S(t))X(t), & (1) \\ X'(t) = -(D - P(S(t - T)))X(t), & (2) \end{cases}$$

其中　$S(t)$: 在 t时刻培养基的浓度; $X(t)$: 在 t时刻微生物的浓度; S^0: 代表养料的初始输入浓度; r: 所生成微生物的量与所用培养基的量之比率; D: 代表流率; $P(S) = \dfrac{S}{K+S}$: X 的增长率 ,_ ,K 是常数; T: 表示消化时滞.

上述基本模型中，除了消化时滞外，微生物 $X(t)$ 没有涉及到时滞问题.我们认为，完全忽略微生物的时滞是不妥当的.事实上，每种微生物都具有成熟期，并且成熟的微生物特别是动物才能生产出新的微生物. 基于这种思想，我们提出如下的反应罐模型:

$$\begin{cases} S'(t) = (S^0 - S(t))D - \dfrac{1}{r}P(S(t))X(t - T), & (3) \\ X'(t) = -DX(t - T) + P(S(t - T))X(t - T), & (4) \end{cases}$$

对于此模型，我们作出这样的生态解释: (3)式中 $-\dfrac{1}{r}P(S(t))X(t - T)$ 表示只有成熟的微生物才消耗培养基; (4)式中 $-DX(t - T)$ 表示，以高效生产为目的，仅允许成熟的微生物离开反应罐; $P(S(t - T))X(t - T)$ 表示只有成熟的微生物能生产出新的微生物.这里以 T表示成熟期，且与消化期相同.此新模型是比较合理的，它不可能出现负的培养基浓度.

令 $S(t) = S^0 s(t)$, $X(t) = rS^0 x(t)$, 且 t又用 $\dfrac{t}{D}$ 来代替，模型 (3) + (4) 可简化为:

$$\begin{cases} s'(t) = 1 - s(t) - p(s(t))x(t - V), & (5) \\ x'(t) = -x(t - V) + p(s(t - V))x(t - V), & (6) \end{cases}$$

其中 $p(s) = \dfrac{ms}{a + s}$, $m = \dfrac{\ }{D}$, $a = \dfrac{K}{S^0}$, $V = TD$.

方程 (5) + (6) 有两个平衡点: (1, 0) 和 (s^*, x^*)，其中 $p(s^*) = 1$, $x^* = 1 - s^*$，即

$$s^* = \frac{a}{m - 1}, \quad x^* = \frac{m - a - 1}{m - 1}.$$

在本文中，我们总假设 $m > a + 1$.这样就使 $s^* > 0$, $x^* > 0$，即 (s^*, x^*) 是内部平衡点.

考虑将内部平衡点 (s^*, x^*) 平移到原点，我们可以得到 (5) + (6) 关于点 (s^*, x^*) 的线性化方程

$$\begin{cases} s'(t) = -(1 + U)s(t) - x(t - V), & (7) \\ x'(t) = Us(t - V), & (8) \end{cases}$$

其中 $U = x^* \cdot p'(s^*) = \dfrac{(m - a - 1)(m - 1)}{ma} > 0$.

(7) + (8) 的特征方程是

$$D(\lambda, V) \overset{\text{def}}{=} \lambda^2 + (1 + U)\lambda + Ue^{-2\lambda V} = 0, \quad (9)$$

研究 (5) + (6) 在内部平衡点 (s^*, x^*) 的稳定性和

2000-06-09收稿.
* 广西教育厅科研经费资助项目.

Hopf分支,仅需考虑系统(7)+(8)在原点的性态.

根据 E. Hopf定理[8]及 J. Hale[9]的基本结论,当我们以滞量 V为参数研究上述系统的有关 Hopf分支时,就要找出 V_0使得特征方程(9)式具有唯一一对纯虚根,而其余特征根都具有严格的负实部.

设 $\lambda = T + ik$,因 $D(\lambda, V) = 0$的复根成对出现,故不妨设 $k > 0$,把 $\lambda = T + ik$代入(9)式得

$$[T^2 - k^2 + (1+U)T + Ue^{-2TV}\cos 2kV] + i[2Tk + (1+U)k - Ue^{-2TV}\sin 2kV] = 0,$$

即

$$\begin{cases} F(T, k, V) \overset{\text{def}}{=} T^2 - k^2 + (1+U)T + Ue^{-2TV}\cos 2kV = 0, \\ G(T, k, V) \overset{\text{def}}{=} 2Tk + (1+U)k - Ue^{-2TV}\sin kV = 0, \end{cases}$$

若 $T = 0$,则

$$\begin{cases} U\cos 2kV = k^2, \\ U\sin 2kV = (1+U)k, \end{cases}$$

故取 k_0和 V_0满足:

$$\begin{cases} U\cos 2k_0V_0 = k_0^2, & (10) \\ U\sin 2k_0V_0 = (1+U)k_0. & (11) \end{cases}$$

解得:

$$k_0 = \left[\frac{\sqrt{(1+U)^4 + 4U^2} - (1+U)^2}{2}\right]^{1/2},$$

$$V_0 = \frac{1}{2k_0}\arcsin\frac{1+U}{U}k_0.$$

当我们以滞量 V为参数时,首先得到如下结论:

定理 1 在点 $A(T, k, V) = (0, k_0, V_0)$的某个开集 G上,存在点 V_0的一个开邻域 $O(V_0, W)$ $(W > 0)$和连续可微函数

$$T = T(V),$$

$$k = k(V): O(V_0, W) \mapsto R = (-\infty, \infty),$$

使得对于任意的 $V \in O(V_0, W)$,有点 $(T(V), k(V), V) \in G$, $T(V_0) = 0$, $k(V_0) = k_0$, 并且

$$\begin{cases} F(T(V), k(V), V) = 0, \\ G(T(V), k(V), V) = 0. \end{cases}$$

证明 易知

$$\begin{cases} F(0, k_0, V_0) = 0, \\ G(0, k_0, V_0) = 0, \end{cases}$$

且 $F(T, k, V)$, $G(T, k, V)$是连续可微函数.

$$J_{(T,k,V)} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial T} & \frac{\partial F}{\partial k} \\ \frac{\partial G}{\partial T} & \frac{\partial G}{\partial k} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2T + 1 + U - 2Ve^{-2TV}U\cos 2kV & -2k - 2Ve^{-2TV}U\sin 2kV \\ 2k + 2Ve^{-2TV}U\sin 2kV & 2T + 1 + U - 2Ve^{-2TV}U\cos 2kV \end{vmatrix}$$

$$= [2T + 1 + U - 2Ve^{-2TV}U\cos 2kV]^2 + [2k + 2Ve^{-2TV}U\sin kV]^2.$$

特别地,有

$$J_{(0,k_0,V_0)} = [1 + U - 2V_0U\cos 2k_0V_0]^2 + [2k_0 + 2V_0U\sin 2k_0V_0]^2.$$

注意到 (10) 和 (11), 可得

$$J_{(0,k_0,V_0)} = (1 + U - 2V_0k_0^2)^2 + [2k_0 + 2V_0(1+U)k_0]^2$$

$$= (1 + U + 2V_0k_0^2)^2 + 4k_0^2 + [2V_0(1+U)k_0]^2.$$

显然, 对任意 $U \in R$,总有

$$J_{(0,k_0,V_0)} > 0.$$

根据隐函数存在定理,我们就可以得到定理的结论.证毕.

注: 定理 1表明了,当参数 V在 V_0某一邻域内变化时,相应的特征方程 $D(\lambda, V) = 0$存在着关于参量 V连续且可微的特征根 $\lambda(V) = T(V) + ik(V)$.

特别地,$\lambda(V_0) = T(V_0) + ik(V_0) = ik_0$,即 $V = V_0$时,特征方程 $D(\lambda, V) = 0$有纯虚根.

定理 2 由定理 1得到的 $D(\lambda, V) = 0$特征根实部 $T(V)$满足:

$$\left.\frac{dT(V)}{dV}\right|_{V=V_0} > 0, \quad (\text{当 } U \neq 0\text{时}).$$

证明 特征方程 $D(\lambda, V) = 0$的两端对 V求导数,得

$$2\lambda\frac{d\lambda}{dV} + (1+U)\frac{d\lambda}{dV} - Ue^{-2\lambda V}\cdot 2\left(V\frac{d\lambda}{dV} + \lambda\right) = 0.$$

整理后,得

$$\frac{d\lambda}{dV} = \frac{2U\lambda e^{-2\lambda V}}{2\lambda + 1 + U - 2VUe^{-2\lambda V}}.$$

所以

$$\left.\frac{d\lambda}{dV}\right|_{V=V_0} = \frac{2Uik_0e^{-2ik_0V_0}}{2ik_0 + 1 + U - 2V_0Ue^{-2ik_0V_0}}$$

$$= \frac{2k_0U[\sin 2k_0V_0 + i\cos 2k_0V_0]}{[1 + U - 2V_0U\cos 2k_0V_0] + i[2k_0 + 2V_0U\sin 2k_0V_0]}$$

$$\overset{(10),(11)}{=} \frac{2k_0[(1+U)k_0 + ik_0^2][(1 + U - 2V_0k_0^2) - i(2k_0 + 2V_0(1+U)k_0)]}{[1 + U - 2V_0k_0^2]^2 + [2k_0 + 2V_0(1+U)k_0]^2},$$

记 $\Delta = [1 + U - 2V_0k_0^2]^2 + [2k_0 + 2V_0(1+U)k_0]^2$,易知 $\Delta > 0$.

由此可得:

$$\left.\frac{dT(V)}{dV}\right|_{V=V_0} = \mathrm{Re}\left.\frac{d\lambda}{dV}\right|_{V=V_0}$$

$$= \frac{2k_0[(1+U)k_0(1 + U - 2V_0k_0^2) + k_0^2(2k_0 + 2V_0(1+U)k_0)]}{\Delta}$$

$$= \frac{2k_0^2[(1+U)^2 + 2k_0^2]}{\Delta},$$

所以, 当 $U \neq 0$时, $k_0 \neq 0$,恒有

$$\left.\frac{dT(V)}{dV}\right|_{V=V_0} > 0. \quad \text{证毕}.$$

注: 因为 $T(V_0) = 0$,由定理 2的结论,可知,当 $V > V_0$且充分靠近 V_0时,必有 $T(V) > 0$,这表明特征方

程 $D(\lambda, V) = 0$出现一对具有正实部的特征根.此时,系统(7)+(8)的平衡点,即原点,将是不稳定的.

定理 3 (1)当 $V \in [0, V_0)$时,特征方程 $D(\lambda, V) = 0$的所有特征根均具有严格负实部.

(2)当 $V = V_0$时,特征方程 $D(\lambda, V) = 0$有唯一一对纯虚根 $\lambda = \pm ik_0$而其余特征根均具严格负实部.

(3) $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{U}\right) < V_0 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{U}\right)\frac{c}{2}$.

证明 $\lambda = ik$是 $D(\lambda, V) = 0$的纯虚根当且仅当

$$\begin{cases} U\cos 2kV = k^2, \\ U\sin 2kV = (1 + U)k, \end{cases}$$

当且仅当

$$\begin{cases} k = k_0 = \left[\frac{\sqrt{(1+U)^4 + 4U^2} - (1+U)^2}{2}\right]^{1/2}, \\ V = V_k = \frac{1}{2k_0}\arcsin\frac{1+U}{U}k_0 + \frac{kc}{k_0} = V_0 + \frac{kc}{k_0}, \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$

当 $V = 0$时,特征方程

$D(\lambda, 0) = \lambda^2 + (1 + U)\lambda + U = (\lambda + U)(\lambda + 1) = 0$,

即特征方程有两个负实根:

$\lambda_1 = -U < 0, \quad \lambda_2 = -1 < 0$.

根据 Rouché 定理(文献[10],定理 9, 17, 4),且 $D(\lambda, V)$关于(λ, V)连续、关于λ解析,我们知道,$D(\lambda, V)$在右半开平面 $B = \{\lambda \in C: \mathrm{Re}\lambda > 0\}$没有零点,故存在 $V^* > 0$,使得:

对任意 $V \in (0, V^*)$, $D(\lambda, V)$在B的边界 $\partial B = \{\lambda \in C: \mathrm{Re}\lambda = 0\}$上没有零点,$D(\lambda, V)$在 B上的零点重数之和不改变,即仍为 0.

所以,只有当 $D(\lambda, V) = 0$在虚轴 ∂B上出现根或有根穿过虚轴时,它在 B中的零点个数才发生变化.这就证明了(1)式.

又注意到定理 2,可知,结论(2)是显然的.

由于 $2k_0V_0 = \arcsin\frac{1+U}{U}k_0 \in \left(0, \frac{c}{2}\right)$,

所以 $\sin 2k_0V_0 = \frac{1+U}{U}k_0$,

$$\frac{1+U}{2UV_0} = \frac{\sin 2k_0V_0}{2k_0V_0} \in \left(\frac{2}{c}, 1\right),$$

即 $1 < \frac{2UV_0}{1+U} < \frac{c}{2}$,

故 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{U}\right) < V_0 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{U}\right)\frac{c}{2}$.

这就得到(3)式.证毕.

类似于定理 2的证明,我们可以得到:

定理 4

$$\left.\frac{\mathrm{d}T(V)}{\mathrm{d}V}\right|_{V=V_k} > 0, \quad (U \neq 0, k = 0, 1, 2, \cdots).$$

再结合 Cooke等的结果[11],得证.

定理 5 当 $V = V_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$时,特征方程 $D(\lambda, V) = 0$有唯一的一对纯虚根,有且仅有 $2k$个具正实部的特征根.

定理 6 (i)当 $V \in [0, V_0)$时,模型(3)+(4)的零解是渐近稳定的;(ii)当 $V > V_0$时,模型(3)+(4)的零解是不稳定的;(iii)$V = V_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$是模型(3)+(4)的 Hopf分支值,即当 V在 $V_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$附近变化时,模型(3)+(4)有小振幅周期解产生.

参考文献

1 Freedman H I, So J, Waltman P. Coexistence in a model of competition in the chemostat incorporating discrete delay. SIAM J Appl Math, 1989, 49: 859~870.

2 Li Xiangao et al. Hopf bifurcation analysis of some modified chemostat models. Northeast Math J, 1998, 14(4): 392~400.

3 Ruan S, Wolknowicz G. Bifurcation analysis of a chemostat model with a distributed delay, J Math Anal Appl, 1996, 204: 786~812.

4 Wolkowicz G, Xia H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays. SIAM J Appl Math, 1997, 57: 1019~1043.

5 Zhao T. Global periodic solutions and uniform persistence for a single population model in chemostat. J Math Anal Appl, 1995, 193: 329~352.

6 Caperon J. Time lag in population growth response of isochrysis galbana to a variable nitrate environment. Ecology, 1969, 50: 188~192.

7 Bush A W, Cook A E. The effect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial treatment of wastewater. J Theor Biol, 1975, 63: 385~396.

8 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge university press, 1981.

9 Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-verlag, 1977.

10 Dieudonné J. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press, 1960.

11 Cooke K, Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability Switches. J Math Anal Appl, 1982, 86: 592~627.

(责任编辑: 黎贞崇)